Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaf...
no. 46, 1914



VARIATIONS-

JOH



dkreises
thematik.



I.

Johann Bernoulli

1.

Einladung zur Lösung eines neuen Problems.

Aus den Acta Eruditorum, Leipzig, Juni 1696. S. 269.

Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt.

Damit Liebhaber solcher Dinge Lust bekommen sich an die Lösung dieses Problems zu wagen, mögen sie wissen, dass es nicht, wie es scheinen könnte, blosse Speculation ist und keinen praktischen Nutzen hat. Vielmehr erweist es sich sogar, was man kaum glauben sollte, auch für andere Wissenszweige, als die Mechanik, sehr nützlich. Um einem voreiligen Urtheile entgegenzutreten, möge noch bemerkt werden, dass die gerade Linie AB zwar die kürzeste zwischen A und B ist, jedoch nicht in kürzester Zeit durchlaufen wird. Wohl aber ist die Curve AMB eine den Geometern sehr bekannte, die ich angeben werde, wenn sie nach Verlauf dieses Jahres kein anderer genannt hat.

2.

Ankündigung,

herausgegeben Gröningen, Januar 1697.

Die scharfsinnigsten Mathematiker des ganzen Erdkreises grüsst Johann Bernoulli, öffentlicher Professor der Mathematik.

Da die Erfahrung zeigt, dass edle Geister zur Arbeit an der Vermehrung des Wissens durch nichts mehr angetrieben

werden, als wenn man ihnen schwierige und zugleich nützliche Aufgaben vorlegt, durch deren Lösung sie einen berühmten Namen erlangen und sich bei der Nachwelt ein ewiges Denkmal setzen, so hoffte ich den Dank der mathematischen Welt zu verdienen, wenn ich nach dem Beispiele von Männern wie Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani und anderen[1], welche vor mir dasselbe thaten, den ausgezeichnetsten Analysten dieser Zeit eine Aufgabe vorlegte, damit sie daran, wie an einem Prüfsteine, die Güte ihrer Methoden beurtheilen, ihre Kräfte erproben und, wenn sie etwas fänden, mir mittheilen könnten; dann würde einem jeden öffentlich sein verdientes Lob von mir zu Theil geworden sein.

Nun habe ich vor einem halben Jahre im Junihefte der Leipziger Acta Eruditorum eine solche Aufgabe vorgelegt, deren Nützlichkeit und Schönheit alle erkennen werden, die sich erfolgreich mit ihr beschäftigen. Sechs Monate Frist vom Tage der Veröffentlichung ab wurde den Geometern gewährt, und wenn bis dahin keine Lösung eingelaufen wäre, versprach ich die meinige mitzutheilen. Verflossen ist dieser Zeitraum, und keine Spur einer Lösung ist erschienen. Nur der berühmte, um die höhere Geometrie so verdiente **Leibniz** theilte mir brieflich mit[2], dass er den Knoten dieses, wie er sich ausdrückte, sehr schönen und bis jetzt unerhörten Problems glücklich aufgelöst habe, und bat mich freundlich, die Frist bis zum nächsten Osterfeste ausdehnen zu wollen, damit die Aufgabe inzwischen in Frankreich und Italien veröffentlicht werden könnte, und Niemand Veranlassung hätte sich über eine zu enge Bemessung des Zeitraums zu beklagen. Dieser ehrenvollen Aufforderung gab ich nach, ja ich beschloss selbst die Verlängerung zu verkündigen, und will jetzt sehen, wer diese edle aber schwierige Aufgabe angreifen und, nach so langer Zeit, endlich sie bemeistern wird. Für die aber, in deren Hände die Leipziger Acta nicht gelangen, wiederhole ich hier die Aufgabe.

Mechanisch-geometrisches Problem

über die Linie des schnellsten Falles.

Zwei gegebene Punkte, welche verschiedenen Abstand vom Erdboden haben und nicht senkrecht übereinander liegen, sollen durch eine Curve verbunden werden, auf welcher ein beweglicher Körper vom

oberen Punkte ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit zum unteren Punkte gelangt.

Der Sinn der Aufgabe ist der: unter den unendlich vielen Curven, welche die beiden Punkte verbinden, soll diejenige ausgewählt werden, längs welcher, wenn sie durch eine entsprechend gekrümmte sehr dünne Röhre ersetzt wird, ein hineingelegtes und freigelassenes Kügelchen seinen Weg von einem zum anderen Punkte in kürzester Zeit durchmisst.

Um aber jede Zweideutigkeit auszuschliessen, sei ausdrücklich bemerkt, dass ich hier Galilei's Hypothese annehme, an deren Wahrheit, wenn man vom Widerstande absieht, kein verständiger Geometer mehr zweifelt, dass nämlich die Geschwindigkeiten, welche ein fallender Körper erlangt, sich wie die Quadratwurzeln der durchmessenen Höhen verhalten. Unser Verfahren für die Lösung ist freilich allgemein und findet auch für jede andere Hypothese Anwendung.

Da nunmehr keine Unklarheit übrig bleibt, bitten wir alle Geometer dieser Zeit insgesammt inständig, dass sie sich fertig machen, dass sie daran gehen, dass sie alles in Bewegung setzen, was sie in dem letzten Schlupfwinkel ihrer Methoden verborgen halten. Wer es vermag, reisse den Preis an sich, den wir dem Löser bereit gestellt haben. Freilich ist dieser nicht von Gold oder Silber, denn das reizt nur niedrige und käufliche Seelen, von denen wir nichts löbliches, nichts nützliches für die Wissenschaft erwarten. Vielmehr, da Tugend sich selbst der schönste Lohn ist und Ruhm ein gewaltiger Stachel, bieten wir als Preis, wie er einem edlen Manne zukommt, Ehre, Lob und Beifall, durch die wir den Scharfsinn dieses grossen Apollo öffentlich und privatim, in Schrift und Wort, preisen, rühmen und feiern werden.

Wenn aber das Osterfest vorübergegangen ist und Niemand unsere Aufgabe gelöst hat, dann werden wir unsere Lösung der Welt nicht vorenthalten, dann wird der unvergleichliche Leibniz seine und unsere Lösung, die wir ihm schon längst anvertraut haben, sofort, wie ich hoffe, ans Licht gelangen lassen. Wenn die Geometer diese Lösungen, welche aus tiefliegender Quelle geschöpft sind, studiren werden, dann werden sie zweifellos erkennen, wie eng die Grenzen der gewöhnlichen Geometrie sind, und werden unsere Entdeckung um so höher schätzen, je weniger Löser unsere ausgezeichnete Aufgabe gefunden hat, sogar unter denen, welche

sich rühmen durch besondere Methoden, die sie so sehr anpreisen, in die tiefsten Geheimnisse der Geometrie eingedrungen zu sein und deren Gebiet in wunderbarer Weise durch goldene Theoreme erweitert zu haben, welche, wie sie wähnten, Niemand kannte, die indess von anderen schon lange vorher veröffentlicht worden waren[3]).

3.

Die Krümmung eines Lichtstrahls in ungleichförmigen Medien und die Lösung des Problems, die Brachistochrone zu finden, das heisst, die Curve, auf welcher ein schwerer Punkt von einer gegebenen Stelle zu einer anderen gegebenen Stelle in kürzester Zeit herabläuft, sowie über die Construction der Synchrone oder der Welle der Strahlen.

Aus den Acta Eruditorum, Leipzig, Mai 1697. S. 206.

Es sind schon soviele Methoden über Maxima und Minima erschienen, dass in Betreff dieses Gegenstandes nichts übrig zu bleiben scheint, dessen Schwierigkeit nicht diejenigen überwinden zu können glauben, welche sich rühmen entweder selbst die Urheber dieser scharfsinnigen Methoden oder Anhänger der Urheber zu sein. Mögen sie nun soviel sie wollen auf des Lehrers Worte schwören, so werden sie doch, wenn sie es nur versuchen, sehen, dass unsere Aufgabe ganz und gar nicht in die engen Grenzen ihrer Methoden sich zwängen lässt, die sich nur soweit erstrecken, als unter gegebenen Grössen, deren Anzahl endlich oder unendlich sein kann, das Maximum oder Minimum zu bestimmen ist. Wenn aber, wie bei unserer Aufgabe, die Grössen, aus welchen die grösste oder kleinste ausgewählt werden soll, ebenso wenig bestimmt sind, als das, was man sucht, da werden sie sich vergebens abmühen. Cartesius, Fermat und andere ausgezeichnete Männer[4]), welche einst für die Vorzüglichkeit ihrer Methoden so heftig kämpften, als ob es sich um Herd und Altar handle, oder jetzt ihre Anhänger an ihrer Stelle, müssen offen eingestehen, dass, wer nur ihre Methoden kennt, hier ganz und gar stecken bleibt. Es ist nicht meine Art und auch nicht meine Absicht

die Erfindungen anderer schlecht zu machen; sie haben sicher viel geleistet und das Ziel, welches sie sich gesetzt hatten, trefflich erreicht; denn ebenso wie in ihren Schriften solche Betrachtungen über Maxima und Minima sich gar nicht finden, ebenso haben sie ihre Methoden nur für die Lösung der gewöhnlichen Aufgaben empfohlen.

Ich verspreche nicht eine allgemeine Methode zu geben, die man wohl vergebens suchen dürfte, wohl aber besondere Verfahrungsarten, welche nicht nur bei dieser, sondern auch bei anderen Aufgaben zum Ziele führen. Mit ihrer Hilfe habe ich das Problem glücklich gelöst und meine Lösung, während andere auf anderen Wegen sich mühten, sofort dem berühmten Leibniz unterbreitet, damit dieser sie mit der seinigen zusammen veröffentlichte, wenn er eine fände. Hieran zweifelte ich nicht, der ich das Genie dieses scharfsinnigen Mannes genügend kenne. In der That erfahre ich, während ich dies schreibe, aus einem der Briefe, mit denen er mich häufig beehrt, dass ihm mein Problem über Erwarten gefallen hat. Es lockte ihn, sagt er, durch seine Schönheit, wie der Apfel die Eva, und er wurde sofort Herr der Lösung. Was andere geleistet haben, wird der Ausgang zeigen. Jedenfalls verdient es das Problem, dass die Geometer seiner Lösung einige Zeit widmen, wenn ein so beschäftigter Mann es nicht für unnütz hielt, seine Zeit darauf zu verwenden. Und dies sei ihnen Gewinn genug, dass sie durch die Lösung Zugang zu verborgenen Wahrheiten erhalten, die sie sonst schwerlich finden dürften.

Mit Recht bewundern wir Huygens, weil er zuerst entdeckte, dass ein schwerer Punkt auf einer gewöhnlichen Cycloide in derselben Zeit herabfällt, an welcher Stelle er auch die Bewegung beginnt[5]). Aber man wird starr vor Erstaunen sein, wenn ich sage, dass gerade die Cycloide, die Tautochrone von Huygens, die gesuchte Brachistochrone ist. Zu dieser Einsicht gelangte ich auf zwei Wegen, einem indirekten und einem direkten. Als ich den ersten verfolgte, entdeckte ich eine wunderbare Übereinstimmung zwischen der krummen Bahn eines Lichtstrahles in einem stetig sich ändernden Medium und unserer Brachistochrone; ich bemerkte auch noch andere geheimnissvolle Dinge, welche bei dioptrischen Untersuchungen von Nutzen sein dürften. Deshalb ist wahr, was ich behauptete, als ich die Aufgabe stellte, dass sie nicht blosse Speculation sei, sondern auch für andere Wissenszweige,

nämlich für die Dioptrik, sich sehr nützlich erweise. Um aber meine Worte durch die That zu bekräftigen, gebe ich hier die erste Lösungsweise.

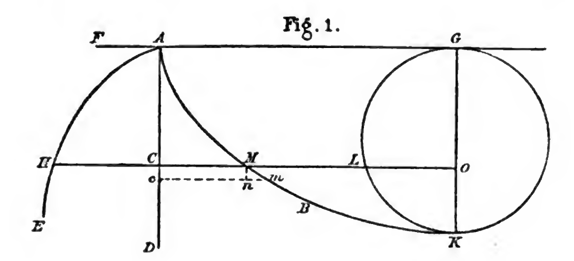
Fermat hat in einem Briefe an De la Chambre (siehe Epist. Cartesii Lat. Tom. III, p. 147 und Fermatii Opera Mathem., p. 156) nachgewiesen, dass ein Lichtstrahl, welcher aus einem dünneren in ein dichteres Medium übergeht, so gegen das Loth gebrochen wird, dass der Strahl, welcher der Annahme nach vom leuchtenden zum beleuchteten Punkte stetig fortschreitet, den rücksichtlich der Zeit kürzesten Weg einschlägt. Mittelst dieses Principes zeigt er, dass der Sinus des Einfallswinkels und der Sinus des Brechungswinkels sich umgekehrt verhalten wie die Dichtigkeiten der Medien, also direkt wie die Geschwindigkeiten, mit denen der Lichtstrahl die Medien durchdringt. Später haben Leibniz in den Acta Eruditorum 1682, S. 185 und bald darauf Huygens in seiner Abhandlung über das Licht, S. 40, dies ausführlicher bewiesen und das physische oder besser metaphysische Princip, welches Fermat, mit seinem geometrischen Beweise zufrieden und allzuleicht sich seines Rechtes begebend, auf Andrängen von Clerselerius verlassen zu haben scheint, durch die kräftigsten Beweisgründe sicher gestellt[6]).

Jetzt wollen wir uns ein Medium denken, welches nicht gleichmässig dicht ist, sondern von lauter parallelen horizontal übereinandergelagerten Schichten gebildet wird, deren jede aus durchsichtiger Materie von gewisser Dichtigkeit besteht, welche nach einem gewissen Gesetze abnimmt oder zunimmt. Dann ist klar, dass ein Lichtkörperchen nicht in gerader, sondern in krummer Linie fortgehen wird. Das hat schon Huygens in der erwähnten Abhandlung über das Licht bemerkt, aber er bestimmte nicht die Beschaffenheit dieser Curve, auf welcher das Lichtkörperchen in kürzester Zeit von einer Stelle zu einer anderen gelangt. Unterwegs wächst seine Geschwindigkeit oder nimmt ab gemäss der Dichtigkeit des Mediums und, da bekanntlich die Sinus der Brechungswinkel in den einzelnen Punkten sich umgekehrt wie die Dichtigkeiten des Mediums oder direkt wie die Geschwindigkeiten des Lichtkörperchens verhalten, so hat die Curve die Eigenschaft, dass die Sinus ihrer Neigungswinkel gegen die Verticale überall den Geschwindigkeiten proportional sind. Jetzt aber erkennt man sofort, dass die Brachistochrone die Curve ist, welche ein Lichtstrahl auf seinem Wege durch ein Medium bilden würde,

dessen Dichtigkeit umgekehrt proportional ist der Geschwindigkeit, welche ein schwerer Körper beim Fallen erlangt. Denn ob der Zuwachs der Geschwindigkeit von der Beschaffenheit eines mehr oder weniger widerstehenden Mediums abhängt, oder ob man von dem Medium absieht und annimmt, dass die Beschleunigung durch eine andere Ursache, aber nach demselben Gesetze, wie bei der Schwerkraft, erzeugt wird: in beiden Fällen wird die Curve in kürzester Zeit durchlaufen, und nichts verbietet die eine an die Stelle der anderen zu setzen.

Auf solche Weise kann man bei beliebigem Gesetze der Beschleunigung unsere Aufgabe lösen, denn sie ist darauf

Fig. 1.



zurückgeführt, dass man den Weg eines Lichtstrahles in einem Medium bestimmt, dessen Dichtigkeit beliebig variirt. Es sei also FGD das Medium, welches von der horizontalen Geraden FG begrenzt wird, in der sich der leuchtende Punkt A befindet. Gegeben sei die Curve AHE mit der verticalen Achse AD, deren Ordinaten HC umgekehrt proportional der Dichtigkeit des Mediums in der Höhe AC oder direkt proportional der Geschwindigkeit des Lichtkörperchens in M ist. Die krumme Bahn des Lichtstrahls, welche man sucht, sei AMB. Man setze

$$AC = x,\ CH = t,\ CM = y$$

und die Differentiale

$$Cc = dx,\ mn = dy,\ Mm = dz,$$

endlich sei a eine willkürliche Constante. Dann ist in M der Sinus des Brechungswinkels oder des Neigungswinkels der Curve

gegen die Verticale gleich $dy : dz$. Nun ist, wie eben gesagt wurde, das Verhältniss dieses Sinus zu HC constant, also

$$dy : t = dz : a,$$

woraus

$$a\,dy = t\,dz$$

und

$$a^2\,dy^2 = t^2\,dz^2 = t^2\,dx^2 + t^2\,dy^2$$

folgt, und dies giebt umgeformt als allgemeine Differentialgleichung der gesuchten Curve AMB:

$$dy = \frac{t\,dx}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

So habe ich mit einem Schlage zwei ausgezeichnete Probleme, ein optisches und ein mechanisches gelöst und mehr geleistet, als ich von anderen verlangte: ich zeigte, dass die beiden Aufgaben, welche ganz verschiedenen Gebieten der Mathematik entnommen sind, dennoch dieselbe Beschaffenheit besitzen.

Betrachten wir jetzt einen besonderen Fall, nämlich die gewöhnliche Hypothese, welche zuerst Galilei einführte und bewies, wonach die Geschwindigkeiten fallender schwerer Körper sich wie die Quadratwurzeln der durchmessenen Höhen verhalten; denn das ist ja eigentlich die Aufgabe. Unter dieser Voraussetzung ist die gegebene Curve AHE eine Parabel und daher $t = \sqrt{ax}$. Setzt man diesen Werth in die allgemeine Gleichung ein, so kommt:

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}},$$

woraus ich schliesse, dass die Brachistochrone die gewöhnliche Cycloide ist. Wälzt sich nämlich der Kreis GLK vom Durchmesser a auf AG und beginnt das Wälzen in A, so beschreibt der Punkt K eine Cycloide, als deren Differentialgleichung, wenn

$$AC = x,\ CM = y$$

gesetzt wird, man gerade

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

findet.

Man kann dies von vorn herein analytisch so zeigen. Es ist

$$dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}=\frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{a\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}-\frac{1}{2}\frac{a\,dx-2\,x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Es ist aber $(a\,dx-2\,x\,dx):2\sqrt{ax-x^2}$ das Differential von $\sqrt{ax-x^2}$ oder LO und $a\,dx:2\sqrt{ax-x^2}$ das Differential von dem Bogen GL. Aus der Gleichung

$$dy=dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

folgt also durch Integration:

$$CM=\text{arc}\ GL-LO.$$

Mithin ist

$$MO=CO-\text{arc}\ GL+LO.$$

Da aber

$$CO=\text{arc}\ GLK,$$
$$CO-\text{arc}\ GL=\text{arc}\ LK$$

ist, so erhält man:

$$MO=\text{arc}\ LK+LO,$$

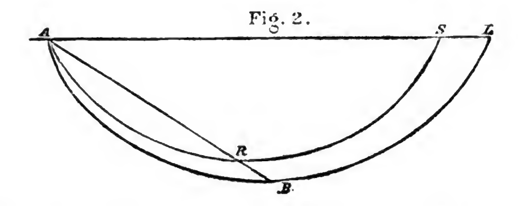
und, indem man auf beiden Seiten LO abzieht:

$$ML=\text{arc}\ LK,$$

was lehrt, dass die Curve KMA eine Cycloide ist.

Um dem Probleme vollständig zu genügen, bleibt noch zu

Fig. 2.



zeigen, wie man von einem gegebenen Punkte als Scheitel die Brachistochrone oder Cycloide beschreiben kann, welche

durch einen zweiten gegebenen Punkt geht. Es geschieht so am leichtesten. Man verbinde die beiden gegebenen Punkte A und B durch eine Gerade AB und beschreibe über der horizontalen Linie AL irgend eine Cycloide, welche nur in A ihren Anfang haben muss. Schneidet sie die Gerade AB in R, so verhält sich der Durchmesser des Kreises, welcher die gesuchte Cycloide ABL erzeugt, zu dem Durchmesser des Kreises, welcher die Cycloide ARS erzeugt, wie $AB : AR$[7]).

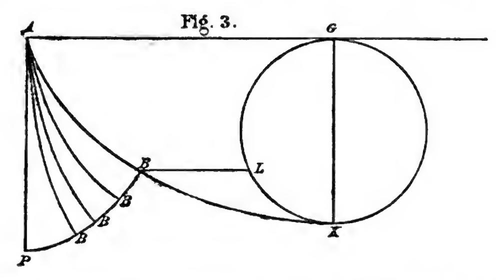
Bevor ich schliesse, muss ich noch einmal der Bewunderung Ausdruck geben, welche ich über die unerwartete Identität der Huygens'schen Tautochrone und meiner Brachistochrone empfinde. Für besonders bemerkenswerth halte ich, dass diese Übereinstimmung nur bei der Hypothese Galilei's stattfindet, so dass man sogar hieraus einen Beweis für ihre Richtigkeit erhält. Denn die Natur pflegt immer auf die einfachste Art zu verfahren, und so leistet sie hier durch eine Curve zwei verschiedene Dienste, während bei jeder anderen Hypothese zwei Curven, die eine für tautochrone Schwingungen, die andere für den schnellsten Fall, nöthig wären. Wenn sich z. B. die Geschwindigkeiten fallender Körper nicht wie die Quadratwurzeln, sondern wie die Kubikwurzeln der Höhe verhielten, so würde die Brachistochrone algebraisch, die Tautochrone transcendent sein; verhielten sich aber die Geschwindigkeiten wie die Höhen, so wären beide algebraisch: jene ein Kreis, diese eine gerade Linie[8]).

Die Geometer werden sich, meine ich, freuen, wenn ich anhangsweise noch die Lösung eines bemerkenswerthen Problems gebe, welches mir anlässlich des Vorhergehenden beim Schreiben einfiel. Man sucht in einer verticalen Ebene eine Curve PB, welche man Synchrone nennen könnte, zu deren Punkten B ein schwerer Körper, welcher auf den Cycloiden AB von A aus fällt, in derselben Zeit gelangt. Der Sinn dieser Aufgabe ist der, dass man von jeder Cycloide mit der Basis AG einen Bogen AB abschneiden soll, welchen der schwere Körper bei seinem Falle von A aus in derselben Zeit zurücklegt, die er brauchen würde, um vertical von A nach einem gegebenen Punkte P zu fallen. Der Ort dieser Punkte B ist die gesuchte Synchrone PB.

Wenn man aufmerksam überlegt, was oben über den Lichtstrahl gesagt wurde, so erkennt man deutlich, dass diese Curve gerade die ist, welche Huygens in der Figur auf S. 44 seiner Abhandlung über das Licht mit BC bezeichnet und

Welle nennt, und wie diese alle Strahlen, die von dem leuchtenden Punkte A ausgehen, senkrecht schneidet, was schon Huygens richtig bemerkt hat, so muss auch unsere Curve PB alle Cycloiden mit dem Anfangspunkte A rechtwinklig treffen[9]). So ist die Aufgabe auf die rein geometrische zurückgeführt, man solle die Curve finden, welche alle Cycloiden mit dem Anfangspunkte A senkrecht schneidet. Hätte ich die Aufgabe in dieser Form gestellt, so würde sie den Geometern viel Mühe gemacht haben. Betrachtet man sie aber von ihrer mechanischen Seite, so ergiebt sich aufs

Fig. 3.



leichteste folgende Construction. Die Cycloide ABK werde von dem Kreise GLK mit dem Durchmesser GK erzeugt. Dann mache man den Bogen GL gleich der mittleren Proportionale aus der gegebenen Strecke AP und dem Durchmesser GK. Zieht man jetzt LB parallel der horizontalen Geraden AG, so wird die Cycloide ABK im gesuchten Punkte B geschnitten[10]). Wenn jemand seine Methode an anderen Aufgaben üben will, so möge er die Curve suchen, welche eine Schaar von transcendenten Curven, denn für algebraische wäre die Sache nicht schwer, z. B. logarithmische Curven mit gemeinsamer Axe, welche durch denselben Punkt gehen, rechtwinklig schneidet[11]).

II.

Jacob Bernoulli

Lösung der Aufgaben meines Bruders, dem ich zugleich dafür andere vorlege.

Aus den Acta Eruditorum, Leipzig, Mai 1697. S. 211.

Die Geometer haben die Methode der Maxima und Minima bis jetzt nur auf Aufgaben angewandt, in denen bei einer der unendlich vielen Functionen einer Curve [12]) der grösste oder kleinste Werth gesucht wird, und sie dachten nicht daran, jene Methode auf Probleme anzuwenden, bei welchen unter unendlich vielen nicht gegebenen Curven die verlangt wird, der eine Eigenschaft des Maximums oder Minimums zukommt, während doch gerade diese Aufgaben den anderen an Schwierigkeit der Lösung und Vorzüglichkeit des Nutzens nicht nachstehen. Zu ihnen gehört die, welche mein Bruder im Juni vorlegte und für deren Lösung er die Frist bis zum Ende des verflossenen Jahres stellte, nämlich das Problem, die Oligochrone zu finden, auf welcher ein schwerer Punkt von einer gegebenen Stelle zu einer anderen gegebenen Stelle seinen Fall in kürzester Zeit vollendet. Obwohl mir die Herausforderung meines Bruders gleichgültig war, konnte ich mich doch der Mühe der Lösung nicht entziehen, als mich der berühmte Leibniz in freundlichster Weise dazu einlud. Denn nachdem er mir in einem Briefe vom 13. September mitgetheilt hatte, er habe das Problem gelöst und wünsche, dass auch andere es versuchten, da griff ich an, was ich sonst unberührt liegen gelassen hätte, und zwar sofort mit dem besten Erfolge: bereits am 6. Oktober hatte ich die Lösung und zeigte sie von da an meinen Freunden. Den Acta theilte ich sie nicht mit, weil ich erfuhr, dass die Frist zu Gunsten der

Auswärtigen bis auf diese Ostern verschoben sei, und mich deshalb entschlossen hatte, meine Forschungen auf andere schwierigere Probleme zu richten und diese gleichzeitig mit meiner Lösung vorzulegen. Bevor ich aber zur Lösung der vorliegenden Aufgabe übergehe, schicke ich folgendes Lemma voraus.

Ist $ACEDB$ die verlangte Curve, auf welcher ein schwerer Punkt in kürzester Zeit von A nach B fällt, und sind C und D zwei beliebig nahe Punkte auf ihr, so ist das Curvenstück CED unter allen Curvenstücken, welche C und D zu Endpunkten haben, das, welches ein schwerer Punkt, der von A aus fällt, in kürzester Zeit durchmisst. Würde nämlich ein anderes Curvenstück CFD in kürzerer Zeit durchmessen werden, so würde der Punkt gegen die Annahme $ACFDB$ in kürzerer Zeit als $ACEDB$ durchlaufen.

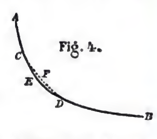


Fig. 4.

Es sei also in einer beliebig gegen den Horizont geneigten Ebene (denn die Ebene braucht nicht vertical zu sein) ACB die gesuchte Curve, auf welcher ein schwerer Punkt von A aus in kürzerer Zeit nach B gelangt, als auf jeder anderen Curve in dieser Ebene. Man nehme auf ihr irgendwo zwei unendlich nahe Punkte C und D an und ziehe die horizontale Gerade AH, das Loth CH, DF parallel AH, halbire CF durch E und vervollständige das Parallelogramm DE durch die Gerade EI. Auf EI ist dann ein Punkt G von der Beschaffenheit zu bestimmen, dass die Zeit des Falles durch CG vermehrt um die Zeit des Falles durch GD ein Minimum ist. Ich bezeichne dies mit

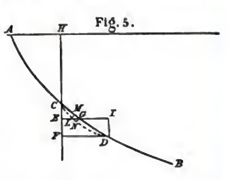


Fig. 5.

$$tCG + tGD;$$

dabei ist immer zu beachten, dass der Fall in der Höhe von A beginnt. Nimmt man jetzt auf der Geraden EI einen anderen Punkt L so an, dass GL unendlich klein gegen EG

ist, und zieht CL und DL, so ist nach der Natur des Minimums:

$$tCL + tLD = tCG + tGD$$

und daher:

$$tCG - tCL = tLD - tGD.$$

Jetzt schliesse ich so. Es ist nach der Natur des Falles schwerer Körper:

$$CE : CG = tCE : tCG$$
$$CE : CL = tCE : tCL,$$

also

$$CE : (CG - CL) = tCE : (tCG - tCL).$$

Nimmt man nun auf CG den Punkt M so an, dass $CM = CL$, folglich $CG - CL = MG$ ist, so hat man wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MLG und CEG:

$$MG : GL = EG : CG,$$

mithin:

$$CE : GL = EG \cdot tCE : CG \cdot (tCG - tCL).$$

Ebenso ist nach der Natur des Falles schwerer Körper:

$$EF : GD = tEF : tGD$$
$$EF : LD = tEF : tLD,$$

also

$$EF : (LD - GD) = tEF : (tLD - tGD).$$

Nimmt man auf DL den Punkt N so an, dass $DG = DN$, folglich $LD - GD = LN$ ist, so hat man wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke LNG und GID:

$$LN : LG = GI : GD,$$

mithin:

$$EF : LG = GI \cdot tEF : GD \cdot (tLD - tGD).$$

Durch Vergleichung erhält man:

$$EG \cdot tCE : CG \cdot (tCG - tCL)$$
$$= GI \cdot tEF : GD \cdot (tLD - tGD)$$

und hieraus durch Umstellung:

$$EG \,.\, tCE : GI \cdot tEF$$
$$= CG\,(tCG - tCL) : GD\,(tLD - tGD) = CG : GD,$$

weil ein Minimum stattfinden soll.

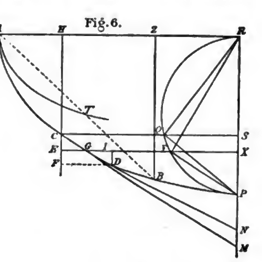
Nach dem Gesetze der Schwere ist aber:

$$EG \cdot tCE : GI \cdot tEF = \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}}$$

und somit endlich:

$$\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = CG : GD.$$

Hier bitten wir beiläufig den berühmten Herrn Nieuwentiit sich den Gebrauch zweiter Differentiale, die er mit Unrecht verwirft, anzusehen[13]). Wir waren nämlich genöthigt den Theil GL der unendlich kleinen Strecke EG im Verhältniss dazu unendlich klein anzunehmen, und ich sehe nicht, wie man sonst zur Lösung des Problems gelangen könnte. Denn es sind EG und GI Elemente der Abscisse AH, CG und GD Elemente der Curve, HC und HE ihre Ordinaten und CE und EF Elemente der Ordinate, das Problem lässt sich also auf das rein geometrische zurückführen, man solle die Curve bestimmen, deren Linienelemente den Elementen der Abscissen direkt und den Quadratwurzeln aus den Ordinaten indirekt proportional sind. Ich finde, dass diese Eigenschaft der Huyghens'schen Isochrone, welche somit auch die Oligochrone ist, nämlich der den Geometern wohlbekannten Cycloide zukommt. Dies beweise ich so. Es sei ACP die Hälfte einer Cycloide, CM und GN zwei ihrer Tangenten, RQP der erzeugende Kreis. Dann ist nach der Definition der Cycloide:



$$GD : GI = GN : GX = VP : VX = VR : RX$$
$$= \sqrt{RP} : \sqrt{RX} = \sqrt{RP} : \sqrt{HE}.$$

Ebenso:

$$EG : CG = CS : CM = QS : QP = RS : RQ$$
$$= \sqrt{RS} : \sqrt{RP} = \sqrt{HC} : \sqrt{RP}.$$

Hieraus folgt:

$$GD : CG = \sqrt{RP} \cdot GI \cdot \sqrt{HC} : \sqrt{HE} \cdot EG \cdot \sqrt{RP}$$
$$= GI \cdot \sqrt{HC} : EG \cdot \sqrt{HE}$$
$$= \frac{GI}{\sqrt{HE}} : \frac{EG}{\sqrt{HC}},$$

was zu beweisen war.

Soll man jetzt eine Cycloide mit der horizontalen Basis AH bestimmen, welche durch die gegebenen Punkte A und B geht, so beschreibe man über AH irgend eine Cycloide AT, welche die nöthigenfalls verlängerte Gerade AB in T schneidet. Dann verhält sich die Strecke AT zur Strecke AB wie der Durchmesser des erzeugenden Kreises der Cycloide AT zum Durchmesser des erzeugenden Kreises der gesuchten Cycloide AB.

Eine andere nicht weniger elegante Aufgabe wäre es, wenn man fragte, auf welcher der unendlich vielen Cycloiden (oder auch Kreise, Parabeln und anderen Curven), die durch A gehen und dieselbe Basis AH haben, ein schwerer Punkt in kürzester Zeit von A nach der senkrechten Geraden ZB gelangt. Wer die Theorie der Maxima und Minima fördern will, möge sich an dieser Aufgabe versuchen; uns genügt es sie vorgelegt zu haben.

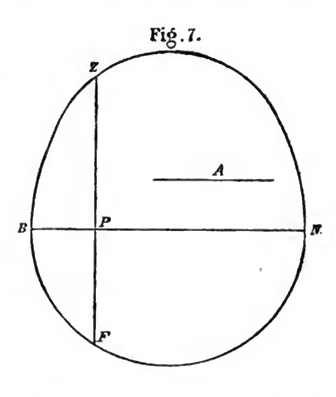
So zeigt eine Curve, welche von so vielen Mathematikern untersucht worden ist, dass an ihr nichts mehr zu erforschen übrig schien, eine neue Eigenschaft, als ob sie, um künftigen Jahrhunderten nichts zu schulden, am Ende des gegenwärtigen den Gipfel der Vollendung erreichen wollte, nachdem sie an seinem Anfange ihren Geburtstag gefeiert und ihr in seiner Mitte alle Ausmessungen nebst anderen schönen Eigenschaften zu Theil geworden waren[14].

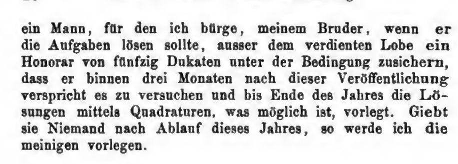
Es möge übrigens bemerkt werden, dass man auf demselben Wege mit gleicher Leichtigkeit die Curve finden kann, welche ein beweglicher Punkt in einem Medium von veränder-

licher Dichtigkeit durchläuft. Diese ist nach einem Princip, welches Leibniz im Juni 1682 bewiesen hat, identisch mit der Brechungscurve, welche Huyghens auf Seite 44 seiner Abhandlung über das Licht betrachtet und deren Übereinstimmung mit der von Leibniz im September 1692 betrachteten, von mir im Juni 1693 construirten Curve, ich, wie mein Bruder weiss, schon längst wahrgenommen habe[15]).

Indess gewinnt man durch diese Untersuchungen einen Zugang zur Behandlung anderer schwieriger Aufgaben, wie die über isoperimetrische Figuren sind. Man fragt zum Beispiel, welche von all' diesen Figuren den grössten Inhalt hat (gewöhnlich glaubt man, es sei der Kreis, das ist richtig, muss aber erst bewiesen werden)[16]) oder bei welcher der Schwerpunkt des Inhaltes oder des Umfanges von der Basis am weitesten entfernt ist; mein Bruder hat bemerkt, dass es die Kettenlinie ist, aber sein Ausgangspunkt war ein anderer[17]). Diese und ähnliche Aufgaben durch die Methode der Maxima zu lösen schlagen wir ihm vor. Besonders aber möge er, wenn er Vergeltung üben will, folgendes allgemeine Problem zu lösen versuchen. Unter allen isoperimetrischen Figuren über der gemeinsamen Basis BN soll die Curve BFN bestimmt werden, welche zwar nicht selbst den grössten Flächeninhalt hat, aber bewirkt, dass es eine andere Curve BZN thut, deren Ordinate PZ irgend einer Potenz oder Wurzel der Strecke PF oder des Bogens BF proportional ist. Damit er nicht ablehnen kann, fügen wir die andere Aufgabe in Betreff der unendlich vielen Cycloiden hinzu, welche oben gestellt wurde und die mit der seinigen grössere Verwandtschaft hat. Und da es unbillig ist, dass jemand für eine Arbeit nicht entschädigt wird, die er zu Gunsten eines anderen mit Aufwand seiner eigenen Zeit und zum Schaden seiner eigenen Angelegenheiten unternimmt, so will

Fig. 7.





ein Mann, für den ich bürge, meinem Bruder, wenn er die Aufgaben lösen sollte, ausser dem verdienten Lobe ein Honorar von fünfzig Dukaten unter der Bedingung zusichern, dass er binnen drei Monaten nach dieser Veröffentlichung verspricht es zu versuchen und bis Ende des Jahres die Lösungen mittels Quadraturen, was möglich ist, vorlegt. Giebt sie Niemand nach Ablauf dieses Jahres, so werde ich die meinigen vorlegen.

III.

Leonhard Euler

Methode Curven zu finden,

denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt

oder

Lösung des isoperimetrischen Problems, wenn es im weitesten Sinne des Wortes aufgefasst wird.

Lausanne und Genf 1744.

1.

Wie wendet man die Methode der Maxima und Minima zur Auffindung von Curven an?

Erklärung I. 1. Die Methode der Maxima und Minima auf Curven angewandt bedeutet eine Methode Curven aufzufinden, denen eine vorgeschriebene Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt.

Folgerung I. 2. Durch diese Methode findet man also Curven, für welche eine vorgelegte Grösse den grössten oder kleinsten Werth annimmt.

Folgerung II. 3. Da aber eine und dieselbe Curve auf unendlich viele Arten sich ähnlich gemacht werden kann, so würde das Problem, wenn nicht eine Einschränkung hinzukäme, unbestimmt und sogar sinnlos sein. Denn wenn man irgend eine Curve vorlegte und behauptete, dass sie eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitze, so könnte man immer eine andere ihr ähnliche oder unähnliche angeben, welche jene Eigenschaft in höherem oder geringerem Grade aufweist.

Folgerung III. 4. Weil also eine genaue Kenntniss der Curven erfordert, dass sie auf eine der Lage nach gegebene Axe und deren Abschnitte, welche Abscissen heissen, bezogen werden, so wird die erste und wichtigste Beschränkung aus der Grösse der Abscissen herzunehmen sein.

Folgerung IV. 5. Daher müssen Aufgaben, auf welche diese Methode anwendbar sein soll, so vorgelegt werden, dass man Curven sucht, welche auf eine der Lage nach gegebene Axe bezogen sind und welche unter allen Curven, die zu demselben Abschnitte der Axe gehören, eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzen.

Anmerkung. 6. Mithin ist diese Methode der Maxima und Minima völlig verschieden von der, welche wir an anderer Stelle auseinandergesetzt haben. Denn dort ermittelten wir für eine gegebene und bestimmte Curve die Stelle, an der eine gegebene, auf die Curve bezügliche, veränderliche Grösse am grössten oder kleinsten wird. Hier aber sucht man gerade die Curve, in welcher eine gegebene Grösse am grössten oder kleinsten wird. Bereits im vorigen Jahrhundert begannen, kurz nach Erfindung der Infinitesimalrechnung, die berühmten Brüder Bernoulli diese Methode auszubilden, welche seitdem grosse Fortschritte gemacht hat. Das erste Problem dieser Gattung[18]) war ein mechanisches, man suchte die Curve, auf welcher ein schwerer Punkt am schnellsten herabgleitet; diese Curve nannte man **Brachistochrone** oder **Curve des schnellsten Falles**. Schon bei diesem Probleme kann offenbar ohne Hinzufügung einer Bedingung von einer Aufgabe nicht die Rede sein, denn je kürzer und je näher der verticalen Lage die Curve gewählt wird, um so kürzer ist selbstverständlich die Zeit des Herabfallens. Man darf daher nicht kurzweg nach der Curve fragen, auf welcher ein schwerer Punkt am schnellsten oder in kürzester Zeit herabgleitet, sondern man muss gleichzeitig den Abschnitt der Axe bestimmen, zu welchem die gesuchte Curve gehören soll, sodass unter allen Curven, welche zu demselben Abschnitte einer der Lage nach gegebenen Axe gehören, die gesucht wird, auf welcher ein schwerer Körper am raschesten herabgleitet. Aber bei diesem Probleme genügte diese Bedingung noch nicht, um es zu einem bestimmten zu machen, sondern man musste noch die Bedingung hinzufügen, dass die gesuchte Curve durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen soll. Und so musste das Problem den genannten Bedingungen unterworfen werden,

um zu einem bestimmten zu werden, nämlich zu dem, man solle unter allen Curven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, die ermitteln, auf welcher ein Körper den Bogen, der zu dem gegebenen Axenabschnitte gehört, in kürzester Zeit durchläuft.

Freilich ist hier zu bemerken, dass die Bedingung des Hindurchgehens durch zwei Punkte nicht unbedingt nothwendig ist, sondern durch die Lösung selbst hineinkommt. Bei der Lösung des Problems gelangt man nämlich sofort zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren zweimalige Integration zwei willkürliche Constanten liefert. Zu ihrer Bestimmung braucht man zwei Punkte, durch welche die Curve hindurchgehen soll, oder andere ähnliche Eigenschaften. Dieselbe Bedingung tritt wie von selbst zu anderen Problemen dieser Art hinzu, deren Lösung sofort auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung führt. Bei den Problemen aber, welche durch eine Differentialgleichung vierter und höherer Ordnung gelöst werden, genügen zur Bestimmung der Curve nicht einmal zwei Punkte, sondern man braucht soviel Punkte, als die Ordnung der Differentiale beträgt. Wenn dagegen die Lösung sogleich zu einer algebraischen Gleichung führt, so ist das Problem, wenn nur die Länge der Abscisse angegeben wird, auch ohne eine solche Bedingung vollständig bestimmt. Das alles aber wird man deutlicher erkennen, wenn wir erst zur Lösung der Probleme gelangen, und dann werden wir diese Begriffe ausführlicher erläutern. Hier im Anfange schien es mir gut sie zu erwähnen, um falsche Anschauungen über die Bestimmtheit solcher Probleme hinwegzuräumen.

Erklärung II. 7. Die absolute Methode der Maxima und Minima lehrt, unter der Gesammtheit aller Curven, welche zu demselben Axenabschnitte gehören, die zu bestimmen, in welcher eine vorgelegte veränderliche Grösse den grössten oder kleinsten Werth erhält.

Folgerung. 8. Daher ist bei Problemen, auf welche man diese Methode anwenden kann, eine Axe der Lage nach gegeben, und unter allen Curven, welche man auf diese Axe und einen bestimmten Abschnitt derselben beziehen kann, wird die gesucht, in welcher eine veränderliche Grösse am grössten oder kleinsten wird.

Anmerkung. 9. Eine andere Bedingung für die Bestimmung eines Maximums oder Minimums als die in Betreff der Länge der Abscisse fügen wir nicht hinzu, denn es giebt

Probleme, welche hierdurch vollständig bestimmt sind, wie unten deutlicher erhellen wird. Denn obwohl auch Probleme auftreten, bei denen man, damit sie bestimmte werden, noch zwei oder mehr Punkte vorschreiben muss, durch welche die gesuchte Curve gehen soll, so erkennt man dies doch erst aus der Lösung eines jeden Problems. Denn wenn man zu einer Gleichung für die gesuchte Curve gelangt, in welche durch Integration neue constante Grössen eingetreten sind, die in der Aufgabe selbst nicht vorkamen, dann muss die Lösung als eine unbestimmte angesehen werden, weil sie unzählig viele Curven in sich enthält, die entstehen, wenn man jenen willkürlichen Constanten bestimmte Werthe beilegt. In diesen Fällen muss man also schliessen, dass das Problem an sich nicht vollständig bestimmt ist, und dass man, um es ganz bestimmt zu machen, ausser der Länge der Abscisse soviel neue Bedingungen hinzufügen muss, dass jene willkürlichen Constanten bestimmte Werthe annehmen. Als solche Bedingungen wählt man am besten Punkte, durch welche die gesuchte Curve hindurchgehen soll; eben so viele Punkte als willkürliche Constanten in der gefundenen Gleichung sind, machen die Gleichung selbst zu einer bestimmten. Um die Curve vollständig zu bestimmen, kann man an Stelle der Punkte auch eben so viele Tangenten nehmen, welche die Curve berühren sollen, und wenn die Berührung in einem gegebenen Punkte der Tangente stattfinden soll, ist diese Bedingung mit zwei Punkten gleichbedeutend. An Stelle der Punkte können auch irgend welche andere Bedingungen gesetzt werden, wenn sie nur so beschaffen sind, dass die willkürlichen Constanten in der gefundenen Gleichung dadurch vollständig bestimmt werden.

Man braucht aber nicht die Lösung der Aufgabe vollendet zu haben, ehe man an diese Entscheidung geht, vielmehr werden später Kennzeichen gegeben werden, mittelst deren man sofort aus der Natur der veränderlichen Grösse, die ein Maximum oder Minimum sein soll, entscheiden kann, welche neuen, in der Aufgabe nicht enthaltenen Constanten in die Curvengleichung eintreten. Die Anzahl dieser willkürlichen Constanten hängt aber von der Ordnung der Differentiale ab, bis zu welcher die Gleichung der gesuchten Curve aufsteigt. Denn soviel die Ordnung der Differentialgleichung für die gesuchte Curve beträgt, soviel willkürliche Constanten sind in ihr potentiell enthalten, und eben so viele Bedingungen sind nöthig,

um die Curve zu bestimmen. Derselbe Umstand erweist sich bei der Lösung aller Probleme als nützlich, bei denen man eine Differentialgleichung erster oder höherer Ordnung findet, sodass hieraus für die beabsichtigte Untersuchung keine besondere Schwierigkeit entsteht.

Erklärung III. 10. Die relative Methode der Maxima und Minima lehrt nicht unter der Gesammtheit aller Curven, welche zu demselben Axenabschnitte gehören, sondern nur unter denen, welche eine vorgeschriebene gemeinschaftliche Eigenschaft haben, diejenige zu bestimmen, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Gerade besitzt.

Folgerung I. 11. Um solche Probleme zu lösen, muss man zuerst aus der Gesammtheit der Curven, welche zu demselben Axenabschnitte gehören, die aussondern, denen die vorgeschriebene Eigenschaft zukommt, und dann unter ihnen die gesuchte bestimmen.

Folgerung II. 12. Obwohl durch diese Bedingung die Anzahl aller Curven, welche zu demselben Axenabschnitte gehören, ausserordentlich beschränkt wird, so bleibt sie doch unendlich gross, und das gilt sogar auch, wenn nicht eine, sondern mehrere Eigenschaften vorgeschrieben sind, welche alle Curven besitzen sollen, unter denen die gesuchte zu bestimmen ist.

Folgerung III. 13. Je mehr Eigenschaften vorgelegt werden, welche den Curven gemeinsam sein sollen, unter denen die gesuchte zu bestimmen ist, um so mehr wird also die Anzahl der Curven beschränkt, unter denen die Auswahl geschehen soll. Aber sie bleibt immer unendlich gross.

Anmerkung I. 14. Von Problemen, wie sie die relative Methode der Maxima und Minima behandelt, ist das erste das am Anfange dieses Jahrhunderts von Jacob Bernoulli vorgelegte isoperimetrische Problem[19]). Man suchte dabei die Curve, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzt, nicht unter allen Curven, die zu demselben Axenabschnitte gehören, sondern nur unter denen, welche dieselbe Länge haben; in Folge dieses Umstandes wurden eben die Curven, unter denen man die gesuchte herausfinden sollte, isoperimetrische genannt. Zum Beispiel kann man unter allen Curven derselben Bogenlänge, die zu demselben Axenabschnitte gehören, diejenige suchen, welche mit Abscisse und Ordinaten den grössten Raum einschliesst. Man findet dann, dass die Kreislinie der Aufgabe genügt, was



freilich die Geometer lange vor Erfindung dieser Methode erkannt und bewiesen hatten.

Aber auch in diesem Falle kommen aus der Natur der Probleme neue Bedingungen hinzu, wie bei denen, welche sich auf die absolute Methode der Maxima und Minima beziehen, und zwar hängen sie von den willkürlichen Constanten ab, welche die Lösung mit sich bringt. So ergeben sich bei der Lösung des Problemes, wo die Curve gesucht wird, die unter allen Curven derselben Bogenlänge mit der Abscisse den grössten Flächenraum einschliesst, zwei neue Constanten. Um das Problem zu einem bestimmten zu machen, muss man es daher so vorlegen, dass unter allen Curven derselben Bogenlänge, welche nicht nur zu demselben Axenabschnitte gehören, sondern auch durch zwei gegebene Punkte gehen, die gesucht wird, welche mit der gegebenen Abscisse den grössten Flächenraum einschliesst. In ähnlicher Weise kann es vorkommen, dass man vier Punkte und bisweilen noch mehr willkürlich annehmen muss, damit das Problem ein bestimmtes wird; die Entscheidung hierüber ist aus der Natur des Problems selbst zu entnehmen.

Wie aber beim isoperimetrischen Probleme vorausgesetzt wird, dass alle Curven, unter denen die gesuchte bestimmt werden soll, dieselbe Bogenlänge besitzen, ebenso kann an Stelle dieser Eigenschaft eine andere vorgelegt werden, welche allen gemeinsam sein soll. Zum Beispiel hat man schon Curven mit der Eigenschaft eines Maximums oder Minimums nur unter allen zu demselben Axenabschnitte gehörigen Curven gesucht, die um die Abscissenaxe gedreht gleiche Oberflächen erzeugen, und in ähnlicher Weise könnten beliebige andere Eigenschaften vorgelegt werden. Ferner aber kann man nicht eine, sondern mehrere solche Eigenschaften vorschreiben, welche allen Curven gemeinsam sein sollen, unter denen diejenige zu bestimmen ist, welche ein Maximum oder Minimum in sich schliesst. Zum Beispiel könnte man nach der Curve fragen, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzt unter allen Curven, die zu demselben Axenabschnitte gehören, wenn die Curven sowohl gleiche Bogenlänge haben, als auch gleiche Flächenräume einschliessen sollen.

Anmerkung II. 15. Wegen dieses Unterschiedes zwischen der absoluten und relativen Methode der Maxima und Minima wird unser Werk aus zwei Theilen bestehen. Im ersten werden wir eine Methode angeben, unter der Gesammtheit aller zu demselben Axenabschnitte gehörenden Curven die zu

bestimmen, welcher eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt. Dann aber werden wir zu Problemen fortschreiten, bei denen eine Curve verlangt wird, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Gerade unter allen denen besitzt, die eine oder mehrere Eigenschaften gemeinsam haben, und aus der Anzahl dieser Eigenschaften wird eine weitere Theilung hervorgehen. Es wird aber nicht nöthig sein mit dieser Theilung weiterzugehen, da bald eine Methode gefunden werden wird, das Problem leicht zu lösen, wieviele Eigenschaften auch vorgelegt sind. Denn die Lösungen von Problemen, welche beim ersten Anblicke sehr verwickelt erscheinen, werden gegen Erwarten sehr leicht und lassen sich ohne grosse Rechnung erledigen.

Annahme I. 16. Im Folgenden werden wir die Abscisse, auf welche alle Curven bezogen werden, immer mit x, die Ordinate aber mit y bezeichnen. Dann soll, wenn die Elemente der Abscissenaxe gleich gross angenommen werden, immer:

$$dy = p\,dx,\; dp = q\,dx,\; dq = r\,dx,\; dr = s\,dx,\; \ldots\ldots$$

sein.

Folgerung I. 17. Durch Einsetzen dieser Werthe werden alle Differentiale jeder Ordnung von y aus den Ausdrücken fortgeschafft, und es bleiben ausser dem Differentiale dx keine anderen Differentiale übrig. Freilich werden so alle Differentiale ausser dx nur scheinbar, nicht wirklich fortgeschafft, aber für unser gegenwärtiges Vorhaben erweisen sich diese Substitutionen als ausserordentlich nützlich.

Folgerung II. 18. Durch diese Substitutionen wird sogar die Annahme eines constanten Differentials ganz aus der Rechnung fortgeschafft, und wenn irgend ein anderes Differential als constant angenommen wird, muss immer bei ihnen dieselbe Formel zum Vorschein kommen. Indess erfordert die unten anzuwendende Methode, dass das Differential dx immer als constant angenommen wird.

Folgerung III. 19. Damit man leicht übersieht, wie durch jene Substitutionen die Differentiale jeder Ordnung von y fortgehen, möge folgende Tabelle hinzugefügt werden:

$$dy = p\,dx,\; d^2y = dp\,dx = q\,dx^2,\; d^3y = dq\,dx^2 = r\,dx^3, \ldots\ldots$$

Folgerung IV. 20. Auch wenn der Bogen der Curve, der zur Abscisse x gehört, mit seinen Differentialen jeder Ordnung auftritt, lassen sich alle diese Grössen so ausdrücken,

dass kein Differential ausser dx vorkommt. Setzt man den Bogen gleich w, so ist:

$$w = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx \sqrt{1 + p^2},$$

$$dw = dx \sqrt{1 + p^2},\ d^2 w = \frac{p q dx^2}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$d^3 w = \frac{p r dx^3}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q^2 dx^3}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdots\cdots$$

Folgerung V. 21. In ähnlicher Weise lässt sich für jede Stelle der Krümmungsradius durch scheinbar endliche Grössen ausdrücken. Denn wenn dx constant ist, wird seine Länge:

$$= -\frac{dw^3}{dx\, d^2 y} = -\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

Folgerung VI. 22. Ebenso werden Subtangente, Subnormale, Tangente und Normale beziehungsweise gleich:

$$\frac{y}{p},\quad yp,\quad \frac{y}{p}\sqrt{1 + p^2},\quad y\sqrt{1 + p^2},$$

und in entsprechender Weise lassen sich alle endlichen auf die Curve bezüglichen Grössen, es sei denn dass sie Integrale enthalten, durch die endlichen Grössen $y, p, \ldots$ so ausdrücken. dass in ihnen scheinbar keine Differentiale mehr vorkommen.

Erklärung IV. 23. Für jedes Problem möge Formel des Maximums oder Minimums die Grösse heissen, welche in der gesuchten Curve einen grössten oder kleinsten Werth annehmen soll.

Folgerung I. 24. Da bei allen Problemen, auf welche sich diese Methode anwenden lässt, die Curve gesucht wird, welche entweder unter allen oder doch unter unzählig vielen in gewisser Weise bestimmten Curven eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzt, so ist die Eigenschaft, welche bei der gesuchten Curve am grössten oder kleinsten sein soll, eine Grösse, welche durch die Formel ausgedrückt wird, die wir eben hier Formel des Maximums oder Minimums nennen.

Folgerung II. 25. Weil aber die Eigenschaft, welche im höchsten oder geringsten Grade vorhanden sein soll, so

vorgelegt werden muss, dass sie zu einer bestimmten gegebenen Abscisse gehört, so muss auch die Formel des Maximums oder Minimums auf jenen abgegrenzten Axenabschnitt bezogen werden.

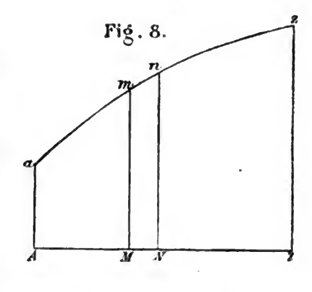
Folgerung III. 26. Es ist daher die Formel des Maximums oder Minimums eine veränderliche Grösse, welche von der Länge der Abscisse abhängt, zu welcher sie gehört, und bei jedem Probleme wird die Curve gesucht, für welche in Bezug auf jene abgegrenzte Abscisse die Formel des Maximums oder Minimums den grössten oder kleinsten Werth annimmt.

Folgerung IV. 27. Die Formel des Maximums oder Minimums darf aber nicht bloss von der Abscisse abhängen. sonst würde sie nämlich für alle zu derselben Abscisse gehörenden Curven denselben Werth annehmen, und sie würden somit alle in gleicher Weise der Aufgabe genügen.

Folgerung V. 28. Deshalb muss die Formel des Maximums oder Minimums ausser von der Abscisse, die allen betrachteten Curven gemeinsam ist, von jeder Curve in besonderer Weise abhängen, sodass es eine giebt, für welche sie den grössten oder kleinsten Werth annehmen kann.

Anmerkung I. 29. Damit man dies deutlicher versteht und das Wesen der im Folgenden zu behandelnden Fragen besser begreift, wollen wir einmal annehmen, dass man entweder unter der Gesammtheit aller Curven, welche zu derselben Abscisse AZ gehören, oder nur unter unzählig vielen mit einer gemeinsamen Eigenschaft diejenige bestimmen soll, für welche die Formel W den grössten oder kleinsten Werth hat. Wir wollen annehmen, dass die Curve amz dieser Aufgabe genügt, sodass der Werth der Formel W für jede andere zur Abscisse AZ gehörende Curve entweder kleiner wird, als für diese, oder grösser, da ja in der Curve, welche Genüge leistet, W ein Maximum oder Minimum sein muss. Bei dieser sehr allgemeinen Aufgabe haben wir also erstens die Abscisse von bestimmter Länge AZ, zweitens ist

Fig. 8.



eine Curve zu suchen entweder unter der Gesammtheit aller Curven, die zu dieser Abscisse gehören, oder unter den unzählig vielen, die eine oder mehrere Eigenschaften gemeinsam haben, je nachdem es sich um ein absolutes oder relatives Maximum oder Minimum handelt, drittens haben wir eine Grösse W, deren Werth in der gesuchten Curve ein Maximum oder Minimum sein soll, und es ist also W die oben definirte Formel des Maximums oder Minimums. Jetzt erkennt man sofort, dass die Formel W so beschaffen sein muss, dass sie allen denkbaren Curven angepasst werden kann. Sie wird daher zunächst von der abgegrenzten Abscisse AZ abhängen und sich ändern, wenn AZ geändert wird. Dann muss sie von der Natur jeder besonderen Curve, welche man sich denken kann, in besonderer Weise abhängen, denn sonst hätte sie für alle Curven denselben Werth, und man hätte keine Aufgabe. Deshalb muss die Grösse W ausser der Abscisse noch Grössen in sich enthalten, welche sich auf die Curve selbst beziehen, und da jede Curve durch eine Beziehung zwischen Abscisse und Ordinate bestimmt wird, so muss die Grösse W aus der Abscisse, der Ordinate und davon abhängigen Grössen gebildet sein. Wenn also die unbestimmte Abscisse mit x, die entsprechende unbestimmte Ordinate mit y bezeichnet wird, so muss W eine Function der beiden Veränderlichen x und y sein. Betrachtet man jetzt eine bestimmte Curve und setzt die aus ihrer Natur folgende Beziehung zwischen x und y in die Formel W ein, so erhält W einen bestimmten Werth, welcher zu jener gegebenen Curve und der abgegrenzten Abscisse gehört. Da nun die Formel W für andere und andere Curven verschiedene Werthe annimmt, auch wenn man bei allen dieselbe Abscisse nimmt, so muss es unter den unzählig vielen Curven eine geben, für welche der Werth der Formel W der grösste oder kleinste wird[20]). Die hier auseinanderzusetzende Methode soll nun bei jeder bestimmten Aufgabe zur Ermittelung dieser Curve dienen.

Folgerung VI. 30. Es ist also die Formel des Maximums oder Minimums W eine gewisse Function der beiden Veränderlichen x und y, von denen x die Abscisse, y die Ordinate bezeichnet. In W können nun nicht bloss x und y vorkommen, sondern auch alle Grössen, die von ihnen abhängen, wie p, q, r, s, . . ., deren Bedeutung wir oben angegeben haben. Sogar aus diesen Grössen gebildete Integralformeln können, ja müssen in W vorkommen, wenigstens

wenn die Aufgabe eine bestimmte sein soll, wie wir bald zeigen werden.

Folgerung VII. 31. Ist daher eine solche Formel W oder eine Function von x und y vorgelegt, und betrifft die Aufgabe die absolute Methode der Maxima und Minima, so verlangt man eine solche Gleichung zwischen x und y, dass, wenn in W der Werth von y, ausgedrückt durch x, eingesetzt wird, der Werth von W grösser oder kleiner ausfällt, als wenn man irgend eine andere Gleichung zwischen x und y angenommen hätte.

Folgerung VIII. 32. So lassen sich Aufgaben der Curvenlehre auf die reine Analysis zurückführen und umgekehrt lässt sich jede vorgelegte analytische Aufgabe dieser Art als eine aus der Curvenlehre ansehen und kann so gelöst werden.

Anmerkung II. 33. Wenn sich auch die Aufgaben dieser Art auf die reine Analysis zurückführen lassen, so ist es doch vortheilhaft, sie mit der Lehre von den Curven in Verbindung zu bringen. Denn wenn man von den Curven abstrahirt und nur reine Grössen betrachtet, so werden einmal die Aufgaben schwerverständlich und unelegant, auch fällt ihr Nutzen und Werth weniger in die Augen, dann aber würde die Methode diese Aufgaben zu lösen schwerverständlich und mühsam sein, wenn sie bloss bei abstracten Grössen auseinandergesetzt werden würde, während sie durch den Anblick der Figuren und die Darstellung der Grössen durch Strecken ausserordentlich unterstützt und dem Verständnisse näher gebracht wird. Aus diesem Grunde werden wir die Aufgaben dieser Art, obwohl sie sich ebensogut auf abstracte wie auf concrete Grössen beziehen können, immer auf Curven zurückführen und so lösen. Wenn nämlich eine Gleichung zwischen x und y gesucht wird von der Beschaffenheit, dass eine gegebene, aus x und y gebildete Formel ein Maximum oder Minimum wird, wenn der Werth von y aus der gesuchten Gleichung entnommen und dem x ein bestimmter Werth ertheilt wird: dann werden wir immer die Aufgabe in die verwandeln, eine Curve zu finden, deren Abscisse x, deren Ordinate y ist und für die jene Formel W, wenn man eine gegebene Abscisse x nimmt, einen grössten oder kleinsten Werth hat.

Nach diesen Bemerkungen wird man die Natur der Fragen, um welche es sich handelt, deutlich genug erkennen, höchstens könnte noch die zweideutige Redeweise

Bedenken erregen, dass gleichzeitig von Maximum und Minimum gesprochen wird. Aber in Wahrheit ist hier keine Zweideutigkeit, denn wenn auch die Methode gleichmässig Maxima und Minima zeigt, so wird es doch in jedem einzelnen Falle leicht sein zu entscheiden, ob die Lösung ein Maximum oder Minimum liefert. Häufig ereignet sich aber auch, dass bei einer Aufgabe sowohl ein Maximum als ein Minimum stattfindet, und in solchen Fällen ist die Lösung eine doppelte, die eine giebt ein Maximum, die andere ein Minimum. Meistens aber pflegt eins von beiden, entweder ein Maximum oder ein Minimum, unmöglich zu sein. Dies geschieht, wenn die Formel des Maximums oder Minimums ins Unendliche wachsen oder abnehmen kann, denn in diesen Fällen giebt es kein Maximum oder Minimum. Es kann auch vorkommen, dass die Formel W sowohl ins Unendliche wachsen als auch abnehmen kann, und dann existirt gar keine Lösung. Alle diese Unterscheidungen wird aber die Rechnung nach der Lösung zeigen[21]).

Lehrsatz I. 34. Damit durch eine Formel des Maximums oder Minimums W eine Curve amz bestimmt wird, welche vor allen übrigen Genüge leistet, muss die Formel W ein nicht bestimmbares Integral sein, welches also nur integrirt werden kann, wenn eine Gleichung zwischen x und y angenommen wird[22]).

Beweis. Nehmen wir an, die Formel W enthalte keine nicht bestimmbaren Integrale. Sie ist dann eine Function von x, y und den davon abhängigen Grössen p, q, r, s, . . ., und zwar entweder eine algebraische oder eine solche transcendente, dass sie ohne Annahme einer Beziehung zwischen x und y ermittelt werden kann; dies tritt ein, wenn entweder Logarithmen dieser Grössen oder Kreisbogen oder andere solche transcendente Grössen vorkommen, welche algebraischen gleichwerthig zu erachten sind. Wird nun W gleich einer solchen Function von x und y allein gesetzt, so ist klar, dass der Werth der Formel W für eine gegebene Curve, welche zu einer gegebenen Abscisse gehört, nur von der letzten Ordinate Zz abhängt und für alle Curven, welche in Z dieselbe Ordinate Zz haben, derselbe ist. Durch eine solche Formel W wird also nicht die Beschaffenheit der ganzen Curve, sondern nur die Lage ihres Endpunktes z bestimmt. Wenn aber in W ausser x und y auch die Grösse p vorkommt, so wird ausser der Länge der Ordinate Zz noch die Stellung der Curventangente in z oder des letzten Elementes der Curve in

z bestimmt. Wenn ferner q vorkommt, so ist die Lage zweier aufeinanderfolgender Curvenelemente in z bestimmt u.s.w. Folglich wird durch eine bestimmte Function W von $x, y, p, q, r, \ldots$ nur ein unendlich kleines Stück der Curve in der Umgebung des Endpunktes z bestimmt, und für alle Curven, welche in derselben Weise enden, ist auch der Werth von W derselbe. Um die ganze Curve, welche der ganzen Abscisse AZ entspricht, zu definiren, muss daher die Formel W so beschaffen sein, dass bei der Bestimmung der Curve amz ihr Werth von der Lage der einzelnen Curvenelemente zwischen a und z abhängt. Das aber kann nur dann eintreten, wenn die Formel W ein nicht bestimmbares Integral ist, welches eben ohne Annahme einer Gleichung zwischen x und y keine Integration zulässt. Was zu beweisen war.

Folgerung I. 35. Wenn also die Formel des Maximums oder Minimums kein nichtbestimmbares Integral ist, so wird die Curve, in welcher der Werth von W am grössten oder kleinsten ist, gar nicht bestimmt, und die Aufgabe, die Curve zu finden, in welcher W ein Maximum oder Minimum ist, sinnlos.

Folgerung II. 36. Damit sich also eine Curve angeben lässt, in welcher, gegenüber den anderen, der Werth von W ein Maximum oder Minimum ist, muss die Formel W die Gestalt:

$$\int Z\,dx$$

haben, wo Z so beschaffen sein muss, dass das Differential $Z\,dx$ nicht integrirt werden kann, es sei denn, dass eine Gleichung zwischen x und y festgesetzt wird.

Anmerkung. 37. Da die Formel des Maximums oder Minimums das Integral einer nicht bestimmbaren Differentialformel ersten Grades sein muss — ersten Grades, damit das Integral endlich ist —, so lässt sich die Differentialformel immer auf die Gestalt $Z\,dx$ zurückführen, mit Hilfe der Buchstaben $p, q, r, \ldots$ Deshalb werden wir im Folgenden die Formel des Maximums oder Minimums stets mit

$$\int Z\,dx$$

bezeichnen. Es ist aber Z eine Function nicht nur von x und y, sondern auch von $p, q, r, \ldots$. Wenn zum

Beispiel die Area $AazZ$ ein Maximum oder Minimum sein soll, so geht die Formel W in

$$\int y\,dx$$

über; wenn die Oberfläche des Rotationskörpers, der durch Drehung der Curve amz um die Axe AZ erzeugt wird, ein Maximum oder Minimum sein soll, ist:

$$W = \int y\,dx\,\sqrt{1+p^2},$$

und so hat jede Formel, welche für die gesuchte Curve ein Maximum oder Minimum sein soll, immer die Form

$$\int Z\,dx,$$

nämlich eines Integrales aus dem Product einer endlichen Grösse Z und dem Differential dx.

Z muss nun eine solche Grösse sein, dass das Integral $\int Z\,dx$ einen bestimmten Werth erhält, wenn eine Gleichung zwischen x und y festgesetzt wird, und daher ist Z entweder eine algebraische oder doch bestimmte Function der Grössen $x, y, p, q, r, \ldots$ oder enthält noch ausserdem nichtbestimmbare Integralformeln in sich. Dieser Unterschied ist sorgfältig zu beachten. Ist zum Beispiel die Formel W des Maximums oder Minimums $\int y\,dx$ oder $\int y\,dx\,\sqrt{1+p^2}$, so ist die Grösse Z algebraisch, ist aber

$$W = \int yx\,dx \int y\,dx,$$

so ist $Z = yx \int y\,dx$, also Z selbst nicht bestimmbar, und sein Werth lässt sich nur angeben, wenn die Beziehung zwischen x und y gegeben wird. Es kann sogar vorkommen, dass Z nicht durch eine solche Formel ausgedrückt werden kann, sondern erst aus einer Differentialgleichung ermittelt werden muss. Ist zum Beispiel

$$dZ = y\,dx + Z^2\,dx,$$

so lässt sich aus dieser Gleichung der Werth von Z durch x und y nicht ausdrücken.

Hieraus ergeben sich drei Arten von Formeln, welche in den gesuchten Curven ein Maximum oder Minimum werden sollen. Die erste Art umfasst die Formeln, in denen Z eine

algebraische oder doch bestimmte Function von x, y, p, q, r, ... ist. Zur zweiten Art gehören die Formeln, in denen Z ausserdem Integrale aufweist. Die dritte Art enthält die Formeln, in welchen der Werth von Z durch eine Differentialgleichung bestimmt wird, deren Integration nicht bekannt ist.

Lehrsatz II. 38. Ist amz eine Curve, in welcher der Werth der Formel $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist, und Z eine algebraische oder doch bestimmte Function von x, y, p, q, r, ..., dann hat auch jeder Theil mn dieser Curve die ausgezeichnete Eigenschaft, dass, wenn er auf die Abscisse MN bezogen wird, der Werth von $\int Z dx$ gleichfalls ein Maximum oder Minimum ist.

Beweis. Der Werth der Formel $\int Z dx$ für die Abscisse AZ ist die Summe der Werthe dieser Formel, welche den einzelnen Theilen der Abscisse entsprechen. Nimmt man also an, dass die Abscisse AZ in beliebig viele Theile zerlegt wird, von denen einer MN ist, und berechnet den Werth der Formel $\int Z dx$ für die einzelnen Theile, so ergiebt die Summe aller dieser Werthe den Werth der Formel $\int Z dx$, welcher der ganzen Abscisse AZ zukommt und der ein grösster oder kleinster ist. Da aber Z als algebraische Function von x, y, p, q, r, ... angenommen ist, so hängt der Werth der Formel $\int Z dx$, welcher MN entspricht, nur von der Beschaffenheit des entsprechenden Curvenstückes mn ab und bleibt derselbe, wie auch die übrigen Stücke am und nz variirt werden, denn die Werthe von x, y, p, q, .. werden ausschliesslich durch das Curvenstück mn bestimmt. Werden also die Werthe von $\int Z dx$, welche den Abscissentheilen AM, MN und NZ zukommen, mit P, Q und R bezeichnet, so sind die Grössen P, Q und R von einander unabhängig. Wenn also ihre Summe $P + Q + R$ ein Maximum oder Minimum ist, so muss auch jede einzelne Grösse diese Eigenschaft besitzen. Wenn daher die Formel $\int Z dx$ für die Curve amz den grössten oder kleinsten Werth hat, und die Grösse Z eine algebraische Function von x, y, p, q, .. ist, dann hat dieselbe Formel $\int Z dx$ auch für jeden Theil jener Curve die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums. Was zu beweisen war.

Folgerung I. 39. Wenn man daher eine Curve amz gefunden hat, welche für eine gegebene Abscisse AZ den grössten oder kleinsten Werth von $\int Zdx$ liefert, während Z eine algebraische oder doch bestimmte Function ist, dann kommt auch jedem Theile dieser Curve bezüglich der entsprechenden Abscisse die Eigenschaft des Maximums oder Minimums zu.

Folgerung II. 40. Bei Problemen, wo ein solches Maximum oder Minimum gesucht wird, braucht man also die Grösse der Abscisse, zu welcher das Maximum oder Minimum gehören soll, nicht zu bestimmen; ist vielmehr $\int Zdx$ für irgend eine Abscisse ein Maximum oder Minimum, so erfreut es sich auch für jede andere Abscisse dieser Eigenschaft.

Folgerung III. 41. Man löst solche Probleme, indem man die einzelnen Theile der gesuchten Curve so bestimmt, dass für sie der Werth der Formel $\int Zdx$ am grössten oder kleinsten wird. Denn alsdann hat auch die ganze Curve und jedes Stück davon ebenfalls die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums.

Anmerkung. 42. Diese Eigenschaft der Curven, in denen $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, wo Z eine algebraische oder doch bestimmte Function von $x, y, p, q, \ldots$ bezeichnet, hat grosse Bedeutung, denn auf ihr beruht die ganze Methode Probleme dieser Art zu lösen. Besonders deshalb aber erschien es nöthig diesen Lehrsatz schon jetzt zu bringen, damit man nicht glaubt, dass die Eigenschaft, welche nur den Formeln $\int Zdx$ zukommt, wo Z eine algebraische oder doch bestimmte Function ist, der Gesammtheit aller möglichen Formeln gemeinsam sei; denn wir werden im folgenden Lehrsatze beweisen, dass diese Eigenschaft nicht mehr statt hat, wenn in Z Integralformeln vorkommen; hieraus erkennt man zugleich deutlicher die Natur dieser Aufgaben. Der Beweis des gegenwärtigen Lehrsatzes aber beruht darauf, dass, sobald Z eine algebraische oder doch bestimmte Function von $x, y, p, q, r, \ldots$ ist, der Werth der Formel $\int Zdx$, welcher zu dem Abscissentheile MN gehört, nur von dem entsprechenden Curvenstück mn abhängt und von der übrigen Curve, weder durch den vorhergehenden Theil am noch durch den folgenden nz, nicht beeinflusst wird.

Diese Schlussweise aber versagt, wenn in Z nichtbestimmbare Integrale vorkommen. Denn die Werthe der Grössen $x, y, p, q, \ldots$ für den Curvenbogen mn hängen nur von der Lage dieses Bogens mn und von benachbarten Elementen ab, welche keinen Bogen endlicher Länge bilden. Daher wird jede aus jenen Buchstaben gebildete Grösse allein durch die Natur des Bogens mn bestimmt, es sei denn, dass Integrale vorkommen, wie $\int y\,dx$, welches die ganze vorhergehende Area $AamM$ einführen würde, oder $\int dx\,\sqrt{1+p^2}$, was den ganzen vorhergehenden Curvenbogen mn mit sich brächte.

Hieraus erkennt man genauer, was wir mit einer bestimmten Function von $x, y, p, q, \ldots$ bezeichnen wollen; eine bestimmte Function ist nämlich so beschaffen, dass sie an jeder Stelle nur von den gegenwärtigen Werthen der Grössen $x, y, p, q, \ldots$ abhängt und ihre vorhergehenden Werthe nicht in sich enthält. Eine unbestimmte Function aber ist eine solche, deren Werth an jeder Stelle nicht einzig aus den Werthen bestimmt werden kann, welche $x, y, p, q, \ldots$ an dieser Stelle haben, sondern zu seiner Bestimmung noch alle Werthe erfordert, welche diese Grössen an allen vorhergehenden Stellen angenommen haben. Zum Beispiel ist klar, dass alle algebraischen Functionen zugleich bestimmte sind; ausserdem sind aber auch alle transcendenten Functionen, welche nicht von der Beziehung zwischen x und y abhängen, bestimmte, wie $l\,\sqrt{x^2+y^2}$, e^{py}, $\arcsin\frac{py}{q}$, denn es lassen sich ihre Werthe an jeder Stelle vermöge der Werthe angeben, welche $x, y, p, q, \ldots$ allein an der betreffenden Stelle annehmen. Wenn aber in der Function nichtbestimmbare Integrale vorkommen, die von der gegenseitigen Beziehung zwischen x und y abhängen, dann lässt sich ihr Werth für eine gegebene Stelle nicht aus den Werthen erkennen, welche jene Buchstaben dafür haben, sondern man muss auch alle Werthe an den früheren Stellen kennen, also die allgemeine Beziehung zwischen den Coordinaten x und y. Solche Functionen nennen wir unbestimmte, weil sie ganz und gar von denen verschieden sind, welche wir als bestimmte bezeichneten.

Lehrsatz III. 43. Wird für eine Curve amz, welche zur Abscisse AZ gehört, $\int Z\,dx$ ein Maximum oder Minimum, während Z unbestimmte Integral-

formeln enthält, dann gilt die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums nicht für jedes beliebige Curvenstück, sondern ist nur der Curve eigenthümlich, welche zur Abscisse AZ gehört.

Beweis. Man denke sich die ganze Curve amz, für welche $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, irgendwie durch eine Ordinate Mm in zwei Theile getheilt; der Werth der Formel $\int Zdx$, welcher zu dem Stücke am gehört, heisse P, der Werth derselben Formel für das andere Stück mz heisse Q. Dann ist der Werth von $\int Zdx$ für die ganze Curve gleich $P+Q$. Wir nehmen an, dass $P+Q$ ein Maximum oder Minimum ist. Um aber alle Zweideutigkeit zu vermeiden und die Sache deutlicher auseinanderzusetzen, wollen wir annehmen es sei ein Maximum. Wenn jetzt Q von P unabhängig wäre, so könnte die Summe $P+Q$ nur dann ein Maximum sein, wenn es beide, P und Q, für sich wären. Aber in unserem Falle, wo die Grösse Z nichtbestimmbare Integrale in sich enthält, hängt Q nicht nur von dem Curvenstücke mz ab, auf welches es sich bezieht, sondern gleichzeitig von der ganzen vorhergehenden Curve am und daher auch von P selbst.

Jetzt behaupten wir, dass P nicht ein Maximum zu sein braucht, wenn es $P+Q$ sein soll. Nehmen wir nämlich an, das Curvenstück am habe die Beschaffenheit, dass dafür P ein Maximum ist, und lassen wir das Curvenstück am sich ein wenig ändern, so dass der Werth von $\int Zdx$ kleiner, etwa $P-p$, wird, so kann doch in Folge dieser Änderung der Werth von Q etwa um q wachsen, sodass, nachdem das Curvenstück am ein wenig geändert und $\int Zdx$ dafür kein Maximum mehr ist, der Werth von $\int Zdx$ für die ganze Curve amz gleich $P-p+Q+q$ ist. Da es nun geschehen kann, dass q grösser als p ausfällt, so erkennt man, wie $\int Zdx$ für die ganze Curve ein Maximum sein kann, ohne dass es für das Stück am am grössten ist. Was zu beweisen war.

Folgerung I. 44. Hat man also eine Curve gefunden, die für eine gegebene Abscisse AZ den grössten oder kleinsten Werth von $\int Zdx$ ergiebt, und ist Z eine unbestimmte Function, so folgt daraus nicht, dass jedes Stück der gefundenen Curve auch die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums besitzt.

Folgerung II. 45. Daher muss man bei der Lösung solcher Probleme, bei denen die Curve gesucht wird, welche für eine gegebene Abscisse AZ $\int Z dx$ zu einem Maximum oder Minimum hat, stets die Grösse der ganzen gegebenen Abscisse berücksichtigen, und das Maximum oder Minimum darf man nur für diese, nicht für einen beliebigen Theil davon, zu erreichen suchen.

Folgerung III. 46. Hieraus erhellt der gewaltige Unterschied zwischen den Formeln, in denen die Function Z bestimmt oder unbestimmt ist, und zugleich erkennt man die Verschiedenheit der Methoden, welche man gebrauchen muss, um Aufgaben zu lösen, bei denen die Maximal- oder Minimalwerthe solcher Formeln verlangt werden.

Anmerkung. 47. Aus dem Beweise dieses Lehrsatzes folgt nicht nothwendig, dass die einzelnen Theile einer Curve, welche für eine gegebene Abscisse AZ ein Maximum oder Minimum der Formel $\int Z dx$ ergiebt, sich ebenfalls dieses Vorzuges erfreuen, aber man erkennt leicht, dass dies eintritt, wenn jene Eigenschaft den einzelnen Theilen zukommt. Nichtsdestoweniger ist es durchaus nothwendig, die Lösung stets der ganzen gegebenen Abscisse anzupassen. Freilich kann es bei Problemen der relativen Methode vorkommen, dass man Formeln $\int Z dx$, in denen Z eine unbestimmte Function ist, so behandeln darf, als wäre Z eine bestimmte. Dies tritt nämlich ein, wenn nur unter allen Curven, bei denen die in Z vorkommenden nichtbestimmbaren Integrale dieselben Werthe haben, diejenige gesucht wird, für welche $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist; denn in diesem Falle darf man die nichtbestimmbaren Integrale als bestimmbare ansehen. Wenn zum Beispiel unter allen Curven derselben Länge die zu bestimmen ist, in welcher $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist, und wenn in Z ausser bestimmten Grössen der Curvenbogen $\int dx \sqrt{1+p^2}$ vorkommt, dann darf man ihn wie eine bestimmte Function behandeln, da er ja für alle Curven, unter denen man die gesuchte finden soll, denselben Werth erhält. Das alles wird aber im Folgenden noch deutlicher auseinandergesetzt werden.

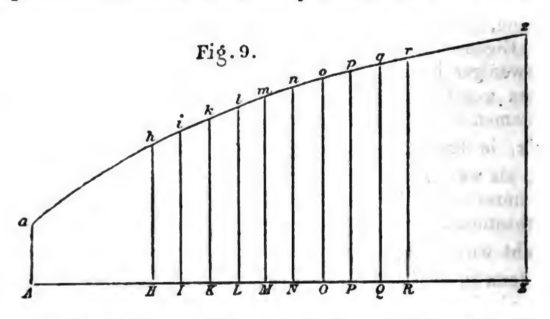
Annahme II. 48. Wenn die Abscisse AZ der Curve in unendlich viele, einander gleiche Elemente IK, KL, LM, . . . getheilt, und irgend ein Stück AM

x genannt wird, dem eine veränderliche Function F entspricht, so wollen wir die Werthe der Function für die folgenden Punkte der Abscisse N, O, P, ... mit F', F'', F''', ..., für die vorhergehenden Punkte L, K, I, ... mit $F_{,}$, $F_{,,}$, $F_{,,,}$, ... bezeichnen. So wird ohne weitläufige Schreibung von Differentialen der Werth, welchen eine veränderliche Function in irgend welchen Punkten der Abscisse annimmt, bequem angezeigt.

Folgerung I. 49. Da der Werth einer Function an irgend einer Stelle gleich dem Werthe an der vorhergehenden ist vermehrt um dessen Differential, so haben wir

$$F' = F + dF,\ F'' = F' + dF',\ F''' = F'' + dF'', \ldots;$$
$$F = F_{,} + dF_{,},\ F_{,} = F_{,,} + dF_{,,},\ F_{,,} = F_{,,,} + dF_{,,,}, \ldots.$$

Folgerung II. 50. Wenn in den einzelnen Theilpunkten der Abscisse Ordinaten gezogen und die der Abscisse $AM = x$ entsprechende Ordinate Mm mit y bezeichnet wird, so sollen



die folgenden Ordinaten Nn, Oo, Pp, ... mit y', y'', y''', ..., die vorhergehenden Ll, Kk, Ii, ... mit $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$, ... bezeichnet werden.

Folgerung III. 51. Ferner ist

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{Nn - Mm}{dx} = \frac{y' - y}{dx},$$

sodass man für die folgenden und vorhergehenden Werthe von p erhält:

$$p = \frac{y' - y}{dx}, \quad p' = \frac{y'' - y'}{dx}, \quad p'' = \frac{y''' - y''}{dx}, \ldots;$$

$$p = \frac{y' - y}{dx}, \quad p_{,} = \frac{y - y_{,}}{dx}, \quad p_{,,} = \frac{y_{,} - y_{,,}}{dx}, \ldots\ldots$$

Folgerung IV. 52. Weiter ist

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{p' - p}{dx} = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2},$$

sodass man für die folgenden und vorhergehenden Werthe von q erhält:

$$q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}, \qquad q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2},$$

$$q' = \frac{y''' - 2y'' + y'}{dx^2}, \qquad q_{,} = \frac{y' - 2y + y_{,}}{dx^2},$$

$$q'' = \frac{y^{IV} - 2y''' + y''}{dx^2}, \ldots; \quad q_{,,} = \frac{y - 2y_{,} + y_{,,}}{dx^2}, \ldots$$

Folgerung V. 53. In ähnlicher Weise lassen sich vermöge jener Zeichen für die Ordinaten die Werthe der Grössen r, s, t, . . bestimmen und aus der Figur entnehmen. Es wird nämlich:

$$r = \frac{y''' - 3y'' + 3y' - y}{dx^3}, \quad s = \frac{y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y}{dx^4}, \ldots,$$

woraus man die vorhergehenden und folgenden Werthe dieser Grössen bilden kann.

Folgerung VI. 54. Bezieht man die Formel $\int Z\,dx$ auf die Abscisse $AM = x$, so ist der Werth, welcher dem folgenden Elemente $MN = dx$ entspricht, gleich $Z\,dx$. Mithin wird man in ähnlicher Weise die den Abscissenelementen MN, NO, OP, PQ, . . . entsprechenden Werthe von $\int Z dx$ mit Zdx, $Z'dx$, $Z''dx$, $Z'''dx$, . . . , die den Elementen MN, LM, KL, IK, . . . entsprechenden mit Zdx, $Z_{,}dx$, $Z_{,,}dx$, $Z_{,,,}dx$, . . . bezeichnen.

Folgerung VII. 55. Bezieht sich der Ausdruck $\int Z dx$ auf die Abscisse $AM = x$, so ist der zu der gegebenen Abscisse AZ gehörige Werth gleich

$$\int Zdx + Zdx + Z'dx + Z''dx + \cdots \text{ in inf.},$$

bis man zum letzten Punkte Z gelangt.

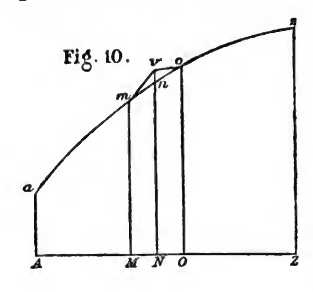
Folgerung VIII. 56. Wenn also die Curve gefunden werden soll, welche für die gegebene Abscisse den grössten oder kleinsten Werth von $\int Zdx$ liefert, so hat man, die unbestimmte Abscisse AM gleich x gesetzt, zu bewirken, dass der Ausdruck

$$\int Zdx + Zdx + Z'dx + Z''dx + \cdots$$

bis zum Punkte Z summirt ein Maximum oder Minimum wird.

Anmerkung. 57. Obgleich die Annahme in gewisser Weise willkürlich ist, so sind doch jene Zeichen sehr nützlich für eine rasche Lösung der Aufgaben, welche sich auf diese Methode der Maxima und Minima beziehen. Denn gar viel vermag bei solchen Geschäften die bequeme Wahl der Zeichen, mittels deren die Rechnung nicht bloss abgekürzt, sondern auch leichter und übersichtlicher gemacht werden kann. Die eingeführte Bezeichnungsart ist aber der üblichen bei weitem vorzuziehen, bei welcher man die aufeinanderfolgenden Werthe der Functionen durch Differentiale zu bezeichnen pflegt, weil bei unserer Lösungsmethode eine andere Art von Differentialen auftritt, welche mit den natürlichen Differentialen veränderlicher Grössen leicht verwechselt werden könnte, wenn nicht vermöge der hier angenommenen Bezeichnungsart die natürlichen Differentiale weggeschafft würden.

Lehrsatz IV. 58. Wenn die Formel $\int Zdx$ einen grössten oder kleinsten Werth für die auf die gegebene Abscisse AZ bezogene Curve $amnoz$ erlangt, und man eine andere Curve $amvoz$ annimmt, welche von jener nur unendlich wenig abweicht, so ist der Werth der Formel $\int Zdx$ für beide Curven derselbe.



Beweis. Wenn in der Analysis irgend ein veränderlicher Ausdruck ein Maximum

wird, so nähert er sich zunächst beständig wachsend dem Maximalwerthe, sobald er ihn aber erreicht hat, entfernt er sich abnehmend von ihm. Dieses Aufsteigen zum Maximalwerthe und Herabsteigen davon geschieht so, dass Abnahme und Zunahme der Grösse momentan verschwinden, wenn diese dem grössten Werthe am nächsten ist; dasselbe gilt vom Minimum. Es giebt freilich Maxima und Minima, in deren Nähe Abnahme und Zunahme unendlich gross ist, aber solche Maxima und Minima kommen bei der gegenwärtigen Untersuchung selten vor, und wenn sie vorkommen, kann man sie leicht bestimmen. Es genügt daher zu bemerken, dass es in der Nähe vom Maximum und Minimum keine endlichen Änderungen giebt.

Hat daher der Ausdruck $\int Z dx$ für die Curve $amnoz$ den grössten oder kleinsten Werth, so wird der Werth des Ausdruckes für eine andere Curve sich umsomehr vom Maximum oder Minimum entfernen, je mehr die andere Curve von jener abweicht. Wenn aber die andere Curve von der, welche Genüge leistet, nur unendlich wenig abweicht, dann erhält die Formel $\int Z dx$ für beide denselben Werth. Eine solche sehr wenig abweichende Curve erhalten wir, wenn wir annehmen, dass nur der unendlich kleine Bogen mno unendlich wenig variirt und an seine Stelle der Bogen $m\nu o$ gesetzt wird. Deshalb wollen wir uns denken, dass aus der Curve az, für welche $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist, ein unendlich kleiner Theil mno ausgeschnitten und an seine Stelle ein anderer, unendlich wenig davon abweichender, $m\nu o$ eingesetzt werde. Dann ist der Werth von $\int Z dx$, welcher der Curve $amnoz$ zukommt, gleich dem, welcher der Curve $am\nu oz$ zukommt, was zu beweisen war.

Folgerung I. 59. Da die Änderung möglichst klein sein muss, genügt es nicht den Bogen mno, welcher geändert werden soll, als unendlich klein anzunehmen, sondern es muss auch die Abweichung $n\nu$ im Verhältniss zu der Länge des Bogens mno unendlich klein sein.

Folgerung II. 60. Bei einer solchen Änderung der Curve ändert sich auch der Werth der Formel $\int Z dx$, welche doch dem Beweise zufolge unverändert bleiben soll. Auf diese Weise ergiebt die angenommene Änderung eine Gleichung, welche die Natur der gesuchten Curve anzeigt.

Anmerkung. 61. Im vorhergehenden Lehrsatze ist die ganze Methode enthalten, Probleme zu lösen, bei denen die Curve verlangt wird, für welche der Werth einer unbestimmten Formel wie $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist. Immer nämlich stellt man sich vor, dass ein unendlich kleiner Theil der Curve, wie mno, variirt werde in mvo, und fragt dann nach dem Unterschiede der Werthe, welche die Formel $\int Zdx$ für die wahre Curve $amnoz$ und für die angenommene $amvoz$ besitzt. Der Unterschied gleich Null gesetzt ergiebt die Natur der gesuchten Curve.

Die Änderung muss an einer unbestimmten Stelle geschehen, damit sie sich auf die ganze Curve bezieht und sich auf jede einzelne Stelle erstreckt. Sie kann aber sonst ganz beliebig gemacht werden, wenn sie nur unendlich klein ist, und kann sich auch auf zwei oder mehrere Elemente der Curve erstrecken. Immer muss jedoch dieselbe Endgleichung herauskommen. Indess erfordert die Bequemlichkeit der Rechnung, dass die Änderung nur bei so wenigen Elementen vorgenommen wird, als zur Lösung hinreichen. Wenn zum Beispiel unter der Gesammtheit aller Curven, welche zu derselben Abscisse gehören, die bestimmt werden soll, in der $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, so genügt es bloss zwei Curvenelemente zu ändern. Wenn aber nicht unter allen Curven, sondern bloss unter denen, welche eine oder mehrere Eigenschaften gemeinsam haben, die bestimmt werden soll, in welcher irgend eine Grösse ein Maximum oder Minimum wird, dann darf man nicht eine beliebige Änderung mvo vornehmen, sondern muss es so einrichten, dass alle jene den Curven gemeinsamen Eigenschaften erhalten bleiben, und in diesen Fällen genügen nicht zwei Elemente, sondern man muss mehr nehmen, damit man allen Bedingungen genügen kann.

Erklärung V. 62. Der zu einer Formel des Maximums oder Minimums gehörige Differentialwerth ist der Unterschied der Werthe, welche diese Formel in der gesuchten Curve und in einer Curve annimmt, welche daraus durch eine unendlich kleine Änderung entsteht.

Folgerung I. 63. In einer Curve also, für welche die gegebene Formel $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum sein soll, muss der zu der Formel gehörige Differentialwerth ver-

schwinden. Setzt man also den Differentialwerth gleich Null, so erhält man eine Gleichung, welche die Natur der Curve ausdrückt.

Folgerung II. 64. Kennt man also den Differentialwerth, welcher zu der vorgelegten Formel des Maximums oder Minimums gehört, so hat man sofort eine Gleichung, welche die Natur der Curve ausdrückt, in der jene vorgelegte Formel den grössten oder kleinsten Werth annimmt.

Folgerung III. 65. Die ganze Arbeit beim Aufsuchen von Curven, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzen, ist hiermit darauf zurückgeführt, dass für jede Formel des Maximums oder Minimums der ihr zukommende Differentialwerth ermittelt wird.

Anmerkung. 66. Nach dieser allgemeinen Darlegung der Natur der Aufgaben, bei denen Curven mit der Eigenschaft eines Maximums oder Minimums gesucht werden, und der Methode, deren man sich zu ihrer Lösung bedienen muss, gehen wir zur eigentlichen Untersuchung über, und zwar werden wir zuerst die absolute Methode darlegen, bei welcher Curven gesucht werden, die unter der Gesammtheit aller auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven eine gewisse Eigenschaft des Maximums oder Minimums besitzen, und dann werden wir zur relativen Methode der Maxima und Minima übergehen, auf welche sich die Aufgaben beziehen, bei denen nicht unter allen einer gegebenen Abscisse entsprechenden Curven, sondern nur unter denen, welche sich einer oder mehrerer gemeinsamer Eigenschaften erfreuen, die bestimmt werden soll, welcher der Vorzug eines Maximums oder Minimums zukommt. In diese Untersuchungen bringt aber die Natur der Formel $\int Z dx$, welche ein Maximum oder Minimum sein soll, einen gewaltigen Unterschied hinein, je nachdem Z eine bestimmte oder unbestimmte Function ist, wie wir dies schon bemerkt haben.

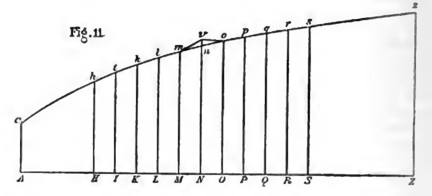
2.

Wie wendet man die absolute Methode der Maxima und Minima zur Auffindung von Curven an?

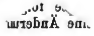
Aufgabe I. 1. Wenn in einer Curve amz irgend eine Ordinate Nn um ein unendlich kleines Stück $n\nu$ vermehrt wird, soll man die Änderung finden, welche

in Folge dessen die einzelnen bestimmten, auf die Curve bezüglichen Grössen erleiden.

Lösung. Bestimmte auf die Curve bezügliche Grössen sind ausser der Abscisse x, welche unverändert bleibt, y, p, q, r, s, ... mit ihren abgeleiteten Werthen, welche sie an den nachfolgenden und vorhergehenden Stellen annehmen. Setzen wir nun $AM = x$ und $Mm = y$, so ist $Nn = y'$, und sein Werth wird durch die Verschiebung des Punktes n nach ν um das Stückchen $n\nu$ vermehrt, während die übrigen folgenden Ordinaten y'', y''', .. und die vorhergehenden $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$, ... unverändert bleiben. Da also nur die Ordinate



Nn um das Stückchen $n\nu$ wächst, schliesst man aus §§ 51 fg. des vorhergehenden Kapitels, welche Änderung die übrigen Grössen in Folge der Veränderung von y' allein erfahren. Es erleiden nämlich eine Änderung alle Grössen, deren Werth von y' abhängt, die übrigen aber, welche von y' nicht abhängen, bleiben unverändert. Zum Beispiel wächst $p = \frac{y' - y}{dx}$ um das Stückchen $\frac{n\nu}{dx}$ und $p' = \frac{y'' - y'}{dx}$ nimmt um das Stückchen $\frac{n\nu}{dx}$ ab. Auf ähnliche Weise findet man die Zunahme oder Abnahme der übrigen Grössen, indem man in ihren oben angegebenen Werthen alle Werthe von y ausser y' wegstreicht und dafür $n\nu$ schreibt, und erhält auf diese Weise folgende Tabelle aller bestimmten Grössen, soweit sie eine Änderung erleiden.



Grösse :	y' ;	p ,	p' ;	$q_{,}$,	q ,	q' ;
Änderung:	$+nv$;	$+\frac{nv}{dx}$,	$-\frac{nv}{dx}$;	$+\frac{nv}{dx^2}$,	$-\frac{2nv}{dx^2}$,	$+\frac{nv}{dx^2}$;
Grösse :		$r_{,,}$,	$r_{,}$,	r ,	r' ;	. . .
Änderung:		$+\frac{nv}{dx^3}$,	$-\frac{3nv}{dx^3}$,	$+\frac{3nv}{dx^3}$,	$-\frac{nv}{dx^3}$;	. . .

Es wäre leicht diese Tabelle fortzusetzen. Was zu finden war.

Folgerung I. 2. Kennt man also die Änderungen dieser auf die Curve bezüglichen Urgrössen, so kann man für alle aus ihnen zusammengesetzten Grössen, wenn man die Art ihrer Zusammensetzung beachtet, die Änderungen bestimmen, welche die Vermehrung der Ordinate y' verursacht.

Folgerung II. 3. Die eben angegebenen Änderungen dieser Grössen kann man gewissermaassen als ihre Differentiale ansehen, und wenn eine aus ihnen zusammengesetzte Grösse vorgelegt ist, so findet man die Änderung, welche durch die Verschiebung des Punktes n nach ν verursacht wird, indem man die betreffende Grösse differentiirt und an Stelle der Differentiale der einzelnen Grössen die Änderungen schreibt, welche unter ihnen vermerkt wurden.

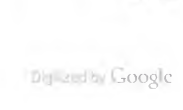
Folgerung III. 4. Hat man zum Beispiel die Änderung der Function $y'\sqrt{1+p^2}$ zu bestimmen, welche durch die Verschiebung des Punktes n nach ν verursacht wird, so differentiire man zuerst diese Function, wodurch man

$$dy' \cdot \sqrt{1+p^2} + \frac{y' p\, dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

erhält, und schreibe dann an Stelle von dy' und dp die Änderungen der Grössen y' und p, nämlich $+n\nu$ und $+\frac{n\nu}{dx}$. Man findet so als Zuwachs der vorgelegten Function:

$$+n\nu \cdot \sqrt{1+p^2} + \frac{y'p \cdot n\nu}{dx\sqrt{1+p^2}}.$$

Folgerung IV. 5. Leicht kann man also durch Differentiation einer beliebigen Function die Änderung ermitteln, welche aus dem Zuwachs $n\nu$ der Ordinate y' hervorgeht, was aus dem Anblicke der Figur nur schwierig und allgemein überhaupt nicht geschehen kann.



Anmerkung. 6. Es ist wohl zu beachten, dass diese Methode die Änderung von Functionen oder Grössen zu finden, welche aus x, y, p, q, . . und den daraus abgeleiteten y', y'', p', p'', . . . zusammengesetzt sind, nur bei bestimmten Functionen zum Ziele führt, sich aber nicht auf unbestimmte ausdehnen lässt. Denn ist die vorgelegte Function eine unbestimmte oder eine nicht bestimmbare Integralformel, die weder algebraisch noch transcendent integrirt werden kann, dann kommt man durch Differentiation nicht zum Ziel, wenn man ihre Änderung finden will. Sobald wir im Folgenden solche Formeln des Maximums oder Minimums $\int Z dx$ betrachten werden, in denen Z eine unbestimmte Function ist, werden wir die Änderungen derartiger Functionen ermitteln. Ist aber Z eine bestimmte Function, so genügt die Lösung des vorliegenden Problems, um die Lösung aller hierher gehörenden Probleme zu bewerkstelligen.

Aufgabe II. 7. Man soll, wenn Z eine bestimmte Function von x und y allein ist, die Curve az finden, in welcher der Werth der Formel $\int Z dx$ am grössten oder kleinsten ist.

Lösung. Man denke sich die Abscisse AZ, zu welcher das Maximum oder Minimum der Formel $\int Z dx$ gehören soll, in unzählig viele gleiche Elemente getheilt, die alle mit dx bezeichnet werden mögen. Setzt man die unbestimmte Abscisse $AM = x$, die Ordinate $Mm = y$, so liefert das Element MN zur Formel $\int Z dx$ den Beitrag $Z dx$ und nach unserer Bezeichnungsweise ergeben die folgenden Elemente NO, OP, PQ, . . . die Werthe $Z' dx$, $Z'' dx$, $Z''' dx$, . . ., die vorhergehenden LM, KL, IK aber $Z_{,} dx$, $Z_{,,} dx$, $Z_{,,,} dx$, ... Ist daher die Curve az die gesuchte, so muss $Z dx + Z' dx + Z'' dx + \cdots$ vermehrt um $Z_{,} dx + Z_{,,} dx + Z_{,,,} dx + \cdots$ ein Maximum oder Minimum sein.

Wird jetzt die Ordinate $Nn = y'$ um das Stückchen $n\nu$ vermehrt, so muss jener Ausdruck denselben Werth behalten und sogar der Differentialwerth von $\int Z dx$ oder von der Summe der Glieder $Z dx + Z' dx + Z'' dx + \cdots$ vermehrt um $Z_{,} dx + Z_{,,} dx + Z_{,,,} dx$ . . . . verschwinden. Man muss also die Differentialwerthe der einzelnen Glieder ermitteln, welche aus der Verschiebung des Punktes n nach ν entstehen.

Ihre Summe ist der Differentialwerth der Formel $\int Z\,dx$, welcher gleich Null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Curve ergiebt.

Da nun Z als bestimmte Function von x und y angenommen ist, so hat das Differential Z die Form $Mdx + Ndy$, sodass

$$dZ = Mdx + Ndy$$

ist. Die Differentiale der abgeleiteten Werthe von Z sind also:

$$dZ' = M'dx + N'dy', \quad dZ'' = M''dx + N''dy'', \ldots,$$
$$dZ_{,} = M_{,}dx + N_{,}dy_{,,}, \quad dZ_{,,} = M_{,,}dx + N_{,,}dy_{,,,}, \ldots.$$

Da aber die Differentialwerthe der Glieder Zdx, $Z'dx$. $Z''dx, \ldots$ und $Z_{,}dx$, $Z_{,,}dx, \ldots$ gefunden werden, wenn man diese Glieder differentiirt und $n\nu$ an Stelle von dy', Null an Stelle aller anderen Differentiale schreibt, so besitzt allein das Glied $Z'dx$ einen Differentialwerth, da nur in seinem Differentiale dy' vorkommt. Schreibt man also $n\nu$ statt dy', so ist der Differentialwerth des Gliedes $Z'dx$ gleich $N'dx\,n\nu$, und das ist zugleich der Differentialwerth der ganzen Formel $\int Z\,dx$, weil die übrigen Glieder ausser $Z'dx$ keine Änderung erleiden. An Stelle von N' dürfen wir aber N setzen, weil $N' = N + dN$ ist, und dN gegen N verschwindet.

Man erhält daher für die gesuchte Curve, in welcher $\int Z\,dx$ ein Maximum oder Minimum sein soll, die Gleichung: $Ndx\,n\nu = 0$ oder

$$N = 0,$$

wenn $dZ = Mdx + Ndy$ ist. Was zu finden war.

Folgerung I. 8. Wenn also die Curve bestimmt werden soll, in welcher $\int Z\,dx$ ein Maximum oder Minimum ist, und wenn Z eine bestimmte Function von x und y allein ist, so muss man die Grösse Z differentiiren. Man erhält dann dZ in der Form $Mdx + Ndy$ und bildet hieraus die Gleichung für die gesuchte Curve, nämlich $N = 0$.

Folgerung II. 9. Da somit N eine bestimmte Function von x und y selbst ist, kommt in der Curvengleichung $N = 0$ keine constante Grösse vor, welche nicht in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Z\,dx$ auftrat, und deshalb ist die

gefundene Curve einzig in ihrer Art und vollkommen bestimmt.

Folgerung III. 10. Bei Aufgaben, welche unter diesem Probleme begriffen sind, wird also die Curve, die Genüge leistet, einzig aus der Formel des Maximums oder Minimums bestimmt, und man darf nicht noch Punkte vorschreiben, durch welche die gesuchte Curve hindurchgehen soll.

Folgerung IV. 11. Ist Z eine Function von x allein, sodass y darin nicht vorkommt, so ist $\int Z dx$ auch eine bestimmte Function von x allein, und alle Curven, welche zu derselben Abscisse gehören, genügen in gleicher Weise. Dasselbe zeigt aber auch die Rechnung, denn in diesem Fall, wo y in Z nicht enthalten ist, wird $N = 0$, und man erhält gar keine Gleichung für die gesuchte Curve.

Folgerung V. 12. Man kann auch sofort erkennen, ob es eine Curve giebt, in welcher eine solche Formel $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist, denn wenn man aus der Differentiation von Z einen solchen Werth für N findet, dass durch die Gleichung $N = 0$ keine Curve dargestellt wird, dann giebt es auch keine Curve, in welcher die vorgelegte Formel $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist.

Folgerung VI. 13. Endlich erkennt man auch, dass die Eigenschaft des Maximums oder Minimums nicht auf eine bestimmte Abscisse beschränkt ist; wenn vielmehr eine Curve die Formel $\int Z dx$ für eine Abscisse zu einem Maximum oder Minimum macht, so hat sie auch für jede andere Abscisse gleichfalls den grössten oder kleinsten Werth.

Anmerkung I. 14. Wir haben somit eine leichte Methode erlangt, unter allen derselben Abscisse entsprechenden Curven die zu bestimmen, in welcher die Formel $\int Z dx$ einen grössten oder kleinsten Werth besitzt, wenn nur Z eine bestimmte Function von x und y allein ist. Zugleich ist auch klar, dass die Curve, welche genügt, immer algebraisch ist, wenn Z eine algebraische Function von x und y ist. Die so gefundene Curve hat die Eigenschaft, dass, wenn irgend eine andere Curve für dieselbe Abscisse angenommen wird, für die Formel $\int Z dx$ ein kleinerer oder grösserer Werth hervorgeht als für die gefundene. Es bleibt aber noch zweifelhaft, ob in der gefundenen Curve der Werth der Formel $\int Z dx$ ein

Maximum oder Minimum ist, was sich in jedem einzelnen Falle leicht entscheiden lässt, ohne dass es allgemein möglich wäre. Das freilich ist gewiss, dass, wenn man nur eine einzige Gleichung erhält, nur entweder ein Maximum oder ein Minimum stattfinden kann; liefert also die gefundene Curve ein Maximum, so giebt es kein Minimum, vielmehr kann der Werth der Formel $\int Z dx$ unbeschränkt vermindert werden, und ebenso kann, wenn man nur eine einzige Curve gefunden hat, welche für die Formel $\int Z dx$ ein Minimum liefert, der Werth von $\int Z dx$ unbeschränkt vermehrt werden. Giebt aber die Lösung gar keine Curve, welche Genüge leistet, so ist das ein Anzeichen dafür, dass der Werth der Formel $\int Z dx$ für jede Abscisse ins Unendliche wachsen und abnehmen kann.

Anmerkung II. 15. Mittelst derselben Lösung kann man auch jene anderen oben erwähnten Curven finden, welche die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums besitzen und zu denen man nicht durch verschwindende, sondern durch unendlich grosse Differentialwerthe gelangt; diese Art des Maximums und Minimums ist von jener gar sehr verschieden. Man findet diese Curven, wenn man den Differentialwerth $N dx \cdot n\nu$ nicht gleich Null, sondern gleich unendlich setzt. So oft also die Gleichung $N = \infty$ eine Curve liefert, so oft erhält auch in ihr die Formel $\int Z dx$ den grössten oder kleinsten Werth; dies tritt ein, wenn N ein Bruch ist, dessen Nenner gleich Null gesetzt die Gleichung für eine Curve ergiebt. Auf diese Art findet man möglicherweise mehrere Curven, welche gleichzeitig der Aufgabe genügen, und die einen liefern ein Maximum, die anderen ein Minimum. Man kann auch mehr als zwei Curven finden, welche der Aufgabe genügen, obwohl man nur die beiden Gleichungen $N = 0$ und $N = \infty$ hat, denn wenn die Grösse N aus Factoren zusammengesetzt ist, so giebt jeder Factor, gleich 0 oder ∞ gesetzt, die Gleichung einer Curve, welche Genüge leistet; denn es ist bekannt, dass oft mehrere Maxima und mehrere Minima statthaben können. Dies alles aber wird klarer werden bei den folgenden zu diesem Probleme gehörigen Beispielen.

Beispiel I. 16. Die Curve zu finden, welche unter allen derselben Abscisse entsprechenden Curven das grösste oder kleinste

$$\int X Y dx$$

hat, wo X eine Function von x allein und Y von y allein bezeichnet.

$$\left[\text{Lösung: } X\frac{dY}{dx} = 0\right].$$

Beispiel II. 17. Die Curve zu finden, welche unter allen derselben Abscisse entsprechenden Curven den grössten oder kleinsten Werth der Formel

$$\int (ax - y^2)\, y\, dx$$

besitzt.

$$\left[\text{Lösung: } ax - 3y^2 = 0\right].$$

Beispiel III. 18. Die Curve zu finden, in welcher unter allen auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven der Werth der Formel

$$\int (15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)\, dx$$

am grössten oder kleinsten ist.

$$\left[\text{Lösung: } (ax - y^2)(ax + y^2 - a^2) = 0\right].$$

Beispiel IV. 19. Unter allen derselben Abscisse entsprechenden Curven die zu bestimmen, in welcher die Formel

$$\int (3ax - 3x^2 - y^2)(ax - x^2 - \tfrac{4}{3}xy + y^2)\, dx$$

den grössten oder kleinsten Werth hat.

$$\left[\text{Lösung: } (y - x)(y^2 - ax + x^2) = 0\right].$$

Anmerkung. 20. Diese Probleme können auch durch die gewöhnliche Methode der Maxima und Minima gelöst werden. Denn wenn die Curve gesucht wird, in welcher für eine beliebige Abscisse der Werth von $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist, so kann offenbar, sobald Z eine bestimmte Function von x und y ist, $\int Z dx$ kein Maximum oder Minimum sein, wenn es nicht das Element $Z dx$, mithin auch Z selbst ist. Man genügt daher der Aufgabe, wenn man Z bei constantem x differentiirt, und das Differential gleich Null setzt. Denn alsdann hat Z immer den grössten oder kleinsten

Werth, also auch Zdx und $\int Zdx$. Differentiirt man aber die Function Z bei constantem x, so ergiebt sich Ndy, da wir ja allgemein das Differential dZ gleich $Mdx + Ndy$ gesetzt haben. Man genügt also durch $N = 0$, und dies ist dieselbe Lösung, welche die vorher dargelegte Methode ergab.

Hiernach könnte es scheinen, als ob solche Aufgaben überhaupt in ähnlicher Art gelöst werden können, wie bei der gewöhnlichen Methode der Maxima und Minima. Dies findet aber nur statt, wenn Z eine Function von x und y allein ist, denn sobald in Z ausserdem die durch Differentiation entstandenen Grössen $p, q, r, \ldots$ vorkommen, dann kann die gewöhnliche Methode nichts mehr nützen. Wenn man nämlich die Function Z bei constantem x differentiirte, so würden in das Differential die Differentiale $dp, dq, dr, \ldots$ eintreten, deren Beziehung zu dy man nicht kennt, und hieraus lässt sich keine Gleichung herleiten, welche zur Bestimmung des Maximums oder Minimums geeignet ist. In diesen Fällen also erkennt man die Nützlichkeit und Nothwendigkeit unserer Methode.

Aufgabe III. 21. Wenn Z eine bestimmte Function von x, y und p ist, sodass man

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp$$

hat, soll man unter allen zu derselben Abscisse gehörenden Curven die finden, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist.

Lösung. Genügt die Curve amz, so denke man sich die Ordinate $Nn = y'$ um das Stückchen $n\nu$ vermehrt. Dann muss der Differentialwerth der Formel $\int Zdx$ oder, was dasselbe ist, von $Zdx + Z'dx + Z''dx + \ldots$ vermehrt um $Z_{,}dx + Z_{,,}dx + \ldots$ gleich Null sein. Man erhält nun den Differentialwerth der ganzen Grösse $\int Zdx$, welcher von der Verschiebung des Punktes n nach ν herrührt, wenn man die Differentialwerthe der einzelnen Glieder, soweit sie durch diese Verschiebung geändert werden, sucht und in eine Summe vereinigt. In Folge der Verschiebung des Punktes n nach ν erleiden aber nur die Glieder eine Veränderung, welche die Grössen y', p und p' enthalten, also nur die Glieder Zdx und $Z'dx$, denn ebenso wie Z ausser von x auch von y und

p abhängt, ebenso ist Z' eine Function von y' und p'. Deshalb muss man diese Glieder differentiiren, und in ihren Differentialen an Stelle von dy', dp und dp' die oben angegebenen Werthe: $+ n\nu$, $+ \frac{n\nu}{dx}$ und $- \frac{n\nu}{dx}$ schreiben. Aber ebenso wie $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ ist, so ist $dZ' = M'dx + N'dy' + P'dp'$. Daher ist der Differentialwerth von Z gleich $P\frac{n\nu}{dx}$, der von Z' gleich $N'n\nu - P'\frac{n\nu}{dx}$, und der von $Zdx + Z'dx$, also auch von der ganzen Formel $\int Zdx$, gleich: $n\nu(P + N'dx - P')$. Es ist aber $P' - P = dP$, und an Stelle von N' darf man N schreiben, woraus sich als Differentialwerth ergiebt: $n\nu(Ndx - dP)$. Da nun der Differentialwerth der Formel $\int Zdx$ gleich Null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Curve ergiebt, so erhält man $0 = Ndx - dP$ oder

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

und durch diese Gleichung wird die Natur der gesuchten Curve ausgedrückt. Was zu finden war.

Folgerung I. 22. Ist also Z eine Function von x und y und von ihren Differentialen dx und dy oder an Stelle dieser Differentiale von p selbst, wobei $dy = p\,dx$ ist, so hat das Differential von Z die Form

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp,$$

und hieraus findet man die Curve, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, wenn man die Gleichung bildet $N - \frac{dP}{dx} = 0$ oder $Ndx = dP$.

Folgerung II. 23. Diese Gleichung ist immer eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, ausser wenn p in P gar nicht vorkommt. Denn wenn P die Grösse p enthält, kommt dp in dP vor, was wegen $p = \frac{dy}{dx}$ Differentiale zweiter Ordnung mit sich bringt.

Folgerung III. 24. Wenn also P in dem Differentiale $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ die Grösse p in sich fasst, so ist die Differentialgleichung für die gesuchte Curve zweiter

Ordnung, und es treten zwei neue Constanten durch die Integration ein. Zur Bestimmung der Constanten darf man zwei Curvenpunkte vorschreiben, denn sonst würde man nicht eine, sondern unzählig viele Curven erhalten.

Folgerung IV. 25. Damit also Probleme der betrachteten Art in bestimmter Weise vorgelegt werden, muss man sie so aussprechen, dass durch zwei gegebene Punkte eine Curve gezogen werden soll, welche unter allen anderen durch die beiden Punkte gezogenen Curven für dieselbe Abscisse x den Werth $\int Z dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht.

Folgerung V. 26. In P kommt die Grösse p nicht vor, wenn Z eine Function von x und y allein ist multiplicirt mit p oder $p + n$, wo n eine Constante bedeutet. Ist nämlich V eine Function von x und y allein, sodass man $dV = M dx + N dy$ hat, und $Z = V(n + p)$, so ist

$$dZ = (n + p) M dx + (n + p) N dy + V dp.$$

Hieraus erhält man als Gleichung für die gesuchte Curve

$$0 = (n + p) N - \frac{dV}{dx}$$

oder $(n + p) N dx = dV = M dx + N dy$.

Folgerung VI. 27. In den Fällen also, wo Z gleich $V(n + p)$ und V eine Function von x und y allein ist, erhält man keine Differentialgleichung zweiter Ordnung, weil dp in ihr nicht vorkommt. Aber man kommt nicht einmal zu einer Differentialgleichung erster Ordnung, sondern zu einer algebraischen Gleichung. Denn da $p dx = dy$ ist, so ist $(n + p) N dx = n N dx + N dy$, und setzt man dies gleich $M dx + N dy$, so erhält man eine durch dx theilbare Gleichung, nämlich $n N = M$, welche sogar algebraisch ist, wenn V eine algebraische Function war.

Folgerung VII. 28. So oft dies eintritt, hat die Formel des Maximums oder Minimums $\int Z dx$ die Gestalt $\int (V n dx + V dy)$ oder, wenn man $n = 0$ setzt, $\int V dy$. Solche Formeln des Maximums oder Minimums führen also auch zu einer bestimmten Gleichung für die gesuchte Curve, sodass man nicht einen oder mehrere Punkte vorschreiben darf, durch welche die Curve hindurchgehen soll.

Folgerung VIII. 29. Wenn also V eine Function von x und y ist, so lässt sich die Formel des Maximums oder Minimums $\int V dy$ in derselben Weise wie $\int V dx$ behandeln.

Denn setzt man $dV = Mdx + Ndy$, so entspricht der Formel $\int Vdx$ die Curvengleichung $N = 0$, der Formel $\int Vdy$ die Gleichung $M = 0$. Hieraus ersieht man, dass die Coordinaten x und y mit einander vertauscht werden dürfen.

Anmerkung I. 30. So erhellt, dass man bei der Lösung solcher Probleme, in denen eine Curve mit einem Maximal- oder Minimalwerth der Formel $\int Zdx$ gesucht wird, während Z eine Function von x, y und p ist, zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gelangt, ausser wenn in Z die Grösse p nur in erster Dimension vorkommt. Oft aber lässt diese Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Integration zu, was man bei den einzelnen Fällen untersuchen muss.

Allgemein möge bemerkt werden, dass die Integration gelingt, wenn x in der Function Z nicht vorkommt, wenn also in dem Differentiale

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp$$

der Werth M verschwindet, sodass dZ gleich $Ndy + Pdp$ wird. Denn die Gleichung für die gesuchte Curve lautet $N - \frac{dP}{dx} = 0$. Multiplicirt man sie mit dy, so geht sie wegen $dy = p\,dx$ über in die Gleichung $Ndy - pdP = 0$, welche mit

$$Ndy + Pdp = Pdp + pdP = dZ$$

gleichbedeutend ist, und hieraus folgt durch Integration die Differentialgleichung erster Ordnung:

$$Z + C = Pp.$$

Sucht man also unter allen zu derselben Abscisse gehörenden Curven die, in welcher der Werth der Formel $\int Zdx$ am grössten oder kleinsten ist, und ist Z nur eine Function von y und p, sodass sich $dZ = Ndy + Pdp$ ergiebt, dann kann man für die gesuchte Curve sogleich die Differentialgleichung erster Ordnung $Z + C = Pp$ angeben.

Ist ferner Z eine Function von x und p allein, und $dZ = Mdx + Pdp$, während das Glied Ndy verschwindet, so ergiebt sich ebenfalls für die Curve eine Differentialgleichung erster Ordnung. Denn aus $dP = 0$ folgt $P = C$, was für die gesuchte Curve nur eine Differentialgleichung

erster Ordnung ergiebt. Wenn ausserdem noch M verschwindet und Z eine Function von p allein, also $dZ = Pdp$ ist, lässt sich die gefundene Gleichung $P = C$ umwandeln in $Pdp = Cdp = dZ$, woraus durch abermalige Integration $Z + D = Cp$ folgt. In diesem Falle aber ergiebt jede der beiden Gleichungen $P = C$ und $Z + D = Cp$, weil Z und P Functionen von p allein sind, für p einen constanten Werth und also eine Gleichung $dy = ndx$, welche anzeigt, dass dem Probleme beliebig gezogene gerade Linien genügen. Denn da C in der Gleichung $P = C$ eine willkürliche Constante ist, fällt auch der Werth von p nicht bloss constant, sondern sogar willkürlich aus, sodass sich jede beliebige Gerade ergiebt. Wenn man daher durch zwei gegebene Punkte eine Curve ziehen soll, für welche $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z bloss von p abhängt, so genügt die durch die beiden Punkte gezogene gerade Linie.

Anmerkung II. 31. Schon oben sahen wir, dass man bei Problemen dieser Art die Coordinaten x und y miteinander vertauschen darf und, wenn es bequem erscheint, die Ordinate y als Abscisse behandelt werden kann. Dasselbe lässt sich aber auch in diesem Falle bekräftigen. Es sei also die Curve zu ermitteln, in welcher $\int Zdy$ ein Maximum oder Minimum sein soll, während Z eine Function von x, y und p und

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp$$

ist. Diese Formel lässt sich auf unsere alte zurückführen und wird dann $\int Zpdx$; dabei ist

$$d(Zp) = Mpdx + Npdy + (Z + Pp)dp.$$

Daher ist der Differentialwerth der vorgelegten Formel

$$(Npdx - dZ - Pdp - pdP)\,n\nu$$

oder

$$(-Mdx - 2\,Pdp - pdP)\,n\nu,$$

und die Gleichung für die gesuchte Curve ist

$$0 = -Mdx - 2\,Pdp - pdP$$

oder

$$0 = -Mdy - d(Pp^2).$$

Setzen wir nun, um die Ähnlichkeit zu zeigen, weil wir hier y als Abscisse betrachten, $dx = \pi\,dy$, so ist $p = \frac{1}{\pi}$,

$dp = -\frac{d\pi}{\pi^2} = -p^2 d\pi$, und, wenn man $\Pi = -Pp^2$ setzt,

$$dZ = Mdx + Ndy - Pp^2 d\pi = Mdx + Ndy + \Pi d\pi,$$

sodass die Ähnlichkeit der Glieder erhalten bleibt. Deshalb ist die Curvengleichung

$$0 = -Mdy + d\Pi;$$

eine Gleichung, welche auch hervorgegangen wäre, wenn man in der Formel $\int Zdy$ die Ordinate y in die Abscisse und umgekehrt die Abscisse in die Ordinate verwandelt hätte. Ist also irgend eine unbestimmte Formel vorgelegt, welche aus x, y und deren Differentialen zusammengesetzt ist, und soll diese ein Maximum oder Minimum sein, so darf man jede der beiden Coordinaten x und y nach Belieben als Abscisse ansehen und ihr das Maximum oder Minimum anpassen.

Beispiel I. 32. Unter allen auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven soll man die bestimmen, in welcher

$$\int (Zdx + [Z]dy)$$

ein Maximum oder Minimum ist, während Z und $[Z]$ Functionen von x und y bedeuten, so dass

$$dZ = Mdx + Ndy, \quad d[Z] = [M]dx + [N]dy$$

wird.

Um diese Formel

$$\int (Zdx + [Z]dy)$$

auf die angenommene Form zu bringen, setze man $dy = pdx$. Man erhält dann die Formel

$$\int (Z + p[Z])dx,$$

welche zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll. Differentiirt man also $Z + [Z]p$, so wird das Differential:

$$Mdx + Ndy + [M]pdx + [N]pdy + [Z]dp.$$

Nach der gefundenen Regel geht hieraus für die gesuchte Curve die Gleichung hervor:

$$\begin{aligned} 0 &= (N + [N]p)dx - d[Z] \\ &= (N + [N]p)dx - [M]dx - [N]dy, \end{aligned}$$

und diese ergiebt wegen $[N]\,p\,dx = [N]\,dy$ nach Division mit dx für die gesuchte Curve die algebraische oder doch endliche Gleichung:

$$\dot{N} - [M] = 0$$

oder $N = [M]$. Wenn also die vorgelegte Formel

$$\int (Z\,dx + [Z]\,dy)$$

bestimmbar oder das Differential $Z\,dx + [Z]\,dy$ so beschaffen gewesen wäre, dass es die Integration zulässt, so würde der Aufgabe keine Linie genügt haben oder besser: alle hätten es in gleicher Weise gethan. Denn wenn $Z\,dx + [Z]\,dy$ integrabel ist, so hat man von selbst $N = [M]$, wie wir an anderer Stelle für die bestimmbaren Differentialformeln von zwei Veränderlichen bewiesen haben, und daher geht in diesen Fällen die identische Gleichung $0 = 0$ hervor. Hieraus erkennt man deutlich, dass, wie wir schon oben bemerkten, die Formel des Maximums oder Minimums nichtbestimmbar sein muss, denn sonst würden alle Curven in gleicher Weise genügen.

Beispiel II. 33. Unter allen auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven die zu bestimmen, deren Länge am kleinsten ist, oder in welcher

$$\int dx \sqrt{1 + p^2}$$

ein Minimum ist.

Zunächst ist klar, dass es bei dieser Aufgabe kein Maximum giebt, da man bei festgehaltener Abscisse die Länge der Linien ins Unendliche vermehren kann. Daher hat nur ein Minimum statt, was aus der elementaren Geometrie bekannt ist, in welcher bewiesen wird, dass die gerade Linie gegenüber allen anderen Linien mit denselben Endpunkten am kürzesten ist. Es schien aber gut dieses Beispiel beizubringen, damit man die Übereinstimmung unserer Methode mit einer bekannten Wahrheit sieht, und auch, damit man die Einführung der beiden Punkte, welche man Aufgaben dieser Art hinzufügen muss, besser versteht. Es wird also, wenn man die Formel $\int dx \sqrt{1 + p^2}$ mit der allgemeinen $\int Z\,dx$ vergleicht,

$$Z = \sqrt{1 + p^2}$$

und

$$dZ = \frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

woraus

$$M = 0,\ N = 0,\ P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

folgt. Da nun allgemein für die gesuchte Curve

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

ist, so wird in diesem Falle $dP = 0$ und daher

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const.},$$

woraus

$$p = \text{const.} = n$$

oder

$$dy = n\,dx$$

entsteht, und hieraus ergiebt sich durch abermalige Integration:

$$y = a + nx.$$

Es ist also nicht nur klar, dass die gesuchte Linie eine gerade ist, sondern auch wegen der beiden willkürlichen Constanten, dass es eine beliebig gezogene Gerade ist. Wenn man daher durch zwei gegebene Punkte die kürzeste Linie ziehen soll, so ist es die gerade. Auf ähnliche Art aber erkennt man, dass, wenn die Curve gefunden werden soll, in welcher $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum sein soll, wo Z eine Function von p allein ist, dass dann nur die gerade Linie genügt, wie wir schon oben bemerkten.

Beispiel III. 34. Unter allen auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven die zu bestimmen, in welcher

$$\int \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$$

ein Maximum oder Minimum ist.

Diese Formel entsteht, wenn man bei der Annahme einer gleichförmigen Gravitation nach der Linie des schnellsten Falles

fragt und dabei die Abscissenaxe vertical annimmt[23]). Es ist also

$$Z = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$$

und

$$dZ = -dx\,\frac{\sqrt{1+p^2}}{2x\sqrt{x}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{x(1+p^2)}},$$

mithin wird:

$$M = -\frac{\sqrt{1+p^2}}{2x\sqrt{x}}, \quad N = 0, \quad P = \frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}}.$$

Da nun die gesuchte Curve durch die Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

ausgedrückt wird, so ist

$$dP = 0,$$

und also

$$\frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

wo a eine Constante bedeutet. Hieraus ergiebt sich

$$ap^2 = x + p^2 x$$

und

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

oder

$$y = \int dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Diese Gleichung zeigt an, dass die gesuchte Curve eine Cycloide mit horizontaler Basis ist, deren Spitze im oberen Theile der Axe liegt; eine solche Curve lässt sich stets durch zwei beliebig gegebene Punkte legen.

Beispiel IV. 35. Unter allen auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven die zu bestimmen, in welcher

$$\int y^n dx \sqrt{1+p^2}$$

ein Maximum oder Minimum ist.

Ist diese Formel vorgelegt, so ist

$$Z = y^n \sqrt{1+p^2}$$

und

$$dZ = ny^{n-1}dy\sqrt{1+p^2} + \frac{y^n p\,dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

sodass

$$M = 0, \quad N = ny^{n-1}dy\sqrt{1+p^2}, \quad P = \frac{y^n p}{\sqrt{1+p^2}}$$

wird.

Da also $M = 0$ ist, erhält man sogleich nach § 30 die bereits einmal integrirte Gleichung:

$$Z + C = Pp,$$

welche in unserem Falle:

$$y^n\sqrt{1+p^2} + ma^n = \frac{y^n p^2}{\sqrt{1+p^2}}$$

wird. Setzt man die Constante $a = 0$, so geht $1 + p^2 = p^2$ oder $p = \infty$ hervor, und es genügt eine zur Axe senkrechte Gerade. Allgemein aber findet man die Curven, welche Genüge leisten, aus der Gleichung:

$$y^n + ma^n\sqrt{1+p^2} = 0$$

oder

$$y^{2n} = m^2 a^{2n}(1+p^2).$$

Hieraus folgt

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^{2n} - m^2 a^{2n}}}{ma^n}$$

und

$$x = \int \frac{ma^n dy}{\sqrt{y^{2n} - m^2 a^{2n}}};$$

die Curve lässt sich daher durch zwei gegebene Punkte legen. Ist $n = -\frac{1}{2}$, sodass

$$\int \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}$$

ein Maximum oder Minimum sein muss, so muss gleichfalls die auf eine horizontale Axe bezogene Brachistochrone hervorgehen, und es ist für sie

$$x = \int dy \sqrt{\frac{y}{a-y}},$$

eine Gleichung, die mit der vorhergehenden identisch wird, wenn die Coordinaten x und y unter sich vertauscht werden. Es ist also wie vorher die Curve, welche genügt, eine Cycloide, welche durch Wälzung auf einer horizontalen Basis entstanden ist, und eine solche kann man durch zwei beliebig gegebene Punkte ziehen.

Beispiel V. 36. Unter allen zu derselben Abscisse gehörenden Curven die zu bestimmen, in welcher

$$\int \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2}$$

ein Maximum oder Minimum ist[24]).

Mittels der Substitution $dy = p\,dx$ geht diese Formel in die gewohnte Gestalt:

$$\int \frac{y\,p^3\,dx}{1 + p^2}$$

über. Man findet sie bei der Frage nach dem Rotationskörper, welcher in der Richtung seiner Axe in einer Flüssigkeit bewegt den geringsten Widerstand erleidet, denn in diesem Falle nimmt man den Widerstand als proportional $\int \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2}$ oder $\int \frac{y\,p^3\,dx}{1 + p^2}$ an. Es ist also:

$$Z = \frac{y\,p^3}{1 + p^2}$$

und

$$dZ = \frac{p^3\,dy}{1 + p^2} + \frac{y\,dp\,(3\,p^2 + p^4)}{(1 + p^2)^2},$$

sodass

$$M = 0, \quad N = \frac{p^3}{1 + p^2}, \quad P = \frac{p^2\,y\,(3 + p^2)}{(1 + p^2)^2}$$

wird. Da also $M = 0$ ist, gelingt allgemein eine Integration, und die Gleichung für die gesuchte Curve ist:

$$Z + C = Pp$$

oder:

$$\frac{y p^3}{1+p^2} + a = \frac{p^3 y (3+p^2)}{(1+p^2)^2},$$

woraus man

$$a(1+p^2)^2 = 2p^3 y$$

findet. Die Entwickelung dieser Gleichung lässt sich nicht so anstellen, dass man p eliminirt, vielmehr ist es zweckmässig, die Coordinaten x und y beide durch dieselbe Veränderliche p auszudrücken. Zunächst ist

$$y = \frac{a(1+p^2)^2}{2p^3},$$

dann hat man wegen $dy = p\,dx$ umgekehrt $dx = \frac{dy}{p}$ und

$$x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y\,dp}{p^2}.$$

Wird nun an Stelle von y der gefundene Werth gesetzt, so geht hervor:

$$x = \frac{a(1+p^2)^2}{2p^4} + a\int \frac{dp\,(1+p^2)^2}{2p^5}$$

$$= \tfrac{1}{2} a \left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + lp\right);$$

aus diesen Gleichungen kann man mit Hilfe von Logarithmen die Curve construiren.

Beispiel VI. 37. Die Curve zu finden, in welcher die Formel:

$$\int y x\,dx \sqrt{1+p^2}$$

ein Maximum oder Minimum ist.

[Es ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$x\,dx - y\,dy = \frac{y x\,dp}{1+p^2},$$

welche sich nicht in geschlossener Form integriren lässt.]

Beispiel VII. 38. Die Curve zu finden, in welcher

$$\int (x^2+y^2)^n dx \sqrt{1+p^2}$$

ein Maximum oder Minimum ist.

[Lösung: $\frac{x}{y} = tg\left(\frac{1}{2n} \text{ arc } tg \frac{k+p}{1-kp}\right) = T,$

$$l x = l \frac{T}{1 - pT} - \int \frac{T dp}{1 - pT}.]$$

Anmerkung III. 39. Wenn man also unter allen zu derselben Abscisse gehörenden Curven die finden soll, in welcher $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z von x, y und p abhängt und

$$dZ = M dx + N dy + P dp$$

ist, so erhält man für die gesuchte Curve die Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} = 0.$$

Nun bemerkten wir bei der vorhergehenden Aufgabe, wo Z eine Function von x und y allein war, dass man die Lösung mittelst der gewöhnlichen Methode der Maxima und Minima erhalten könne, denn damit $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist, muss es auch $Z dx$ und daher auch Z selbst in Beziehung auf x sein, und deshalb ergiebt sich die Gleichung der Curve, wenn man das Differential von Z bei constantem x gleich Null setzt. Eine ähnliche Methode würde bei dem gegenwärtigen Probleme zum Ziele führen, wenn nur in dem bei constantem x genommenen Differentiale von Z, nämlich $N dy + P dp$, die Beziehung zwischen dy und dp bekannt wäre, sodass man durch dy dividiren und den endlichen Werth ermitteln könnte, welcher gleich Null zu setzen ist. Während man nun jene Beziehung zwischen dy und dp, ohne welche sich die gewöhnliche Methode der Maxima und Minima nicht anwenden lässt, a priori nicht bestimmen kann, lässt sie sich doch a posteriori angeben; weil nämlich für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

gefunden wurde, erkennt man, dass sie aus der Gleichung $N dy + P dp$ oder $N + P \frac{dp}{dy}$ gleich Null hervorgegangen wäre, wenn man:

$$-\frac{dP}{dx} \quad \frac{P dp}{dy}$$

oder wegen $dy = p\,dx$:

$$0 = dP + \frac{Pdp}{p}$$

festgesetzt hätte.

Jene Beziehung zwischen den Differentialen dy und dp ist daher so beschaffen, dass sie durch die Gleichung

$$p\,dP + Pdp = 0$$

ausgedrückt wird, welche besagt, dass Pp als constant betrachtet werden soll. Hieraus ergiebt sich folgende Regel zur Lösung von Problemen, bei welchen man nach der Curve mit einem Maximum oder Minimum von $\int Z\,dx$ fragt, wo

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp$$

ist: man differentiire Z, setze in dem Differentiale $Mdx + Ndy + Pdp$ an Stelle von Mdx Null, lasse Ndy unverändert und schreibe $-p\,dP$ statt Pdp; was herauskommt setze man gleich Null. Denn auf diese Weise erhält man

$$Ndy - p\,dP = 0,$$

eine Gleichung, welche wegen $dy = p\,dx$ genau in die gefundene

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

übergeht. Man vermisst daher noch eine Methode, welche unabhängig ist von der geometrischen Lösung und erkennen lässt, dass bei einer solchen Ermittelung eines Maximums oder Minimums an Stelle von Pdp geschrieben werden darf $-p\,dP$[25]).

Aufgabe IV. 40. **Wenn Z eine Function von x, y, p und q ist, sodass man**

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$$

hat, soll man unter allen zu derselben Abscisse gehörenden Curven die finden, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist.

Lösung. Der Werth der Integralformel $\int Z\,dx$ lässt sich in die beiden Reihen $Zdx + Z'\,dx + Z''\,dx + \ldots$ und $Z_{,}dx + Z_{,,}dx + Z_{,,,}dx + \ldots$ entwickeln, deren Summe ein Maximum oder Minimum ist, wenn die Differentialwerthe der einzelnen Glieder, die von der Vermehrung der Ordinate y' um

das Stückchen $n\nu$ herrühren, gesammelt und gleich Null gesetzt werden. Durch einen solchen Zuwachs der Ordinate y' erleiden aber nur die Buchstaben y'; p, p'; $q_{,}$, q, q' eine Änderung und daher auch nur die Glieder, in welchen diese Buchstaben vorkommen, nämlich $Z_{,}dx$, Zdx und $Z'dx$. Um die Änderungen dieser Glieder, welche aus der Verschiebung des Punktes n nach ν hervorgehen, zu finden, hat man sie zu differentiiren und erhält:

$$\begin{aligned} d(Z'\,dx) &= dx\,(M'dx + N'dy' + P'dp' + Q'dq'), \\ d(Z\,dx) &= dx\,(M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq\,), \\ d(Z_{,}dx) &= dx\,(M_{,}dx + N_{,}dy_{,} + P_{,}dp_{,} + Q_{,}dq_{,}). \end{aligned}$$

Nun ist, weil die Abscisse x durch jene Verschiebung nicht geändert wird, überall $dx = 0$ zu setzen. Für die übrigen Differentialwerthe aber erhält man nach der ersten Aufgabe dieses Kapitels:

$$\begin{array}{lll} dy' = +\,n\nu & dp' = -\dfrac{n\nu}{dx} & dq' = +\dfrac{n\nu}{dx^2} \\ dy = \quad 0 & dp = +\dfrac{n\nu}{dx} & dq = -\dfrac{2\,n\nu}{dx^2} \\ dy_{,} = \quad 0 & dp_{,} = \quad 0 & dq_{,} = +\dfrac{n\nu}{dx^2}. \end{array}$$

Setzt man diese Werthe der durch $n\nu$ ausgedrückten Differentiale ein, so geht folgender Differentialwerth hervor:

$$\begin{aligned} & n\nu\cdot dx\left(N - \frac{P'}{dx} + \frac{P}{dx} + \frac{Q'}{dx^2} - \frac{2\,Q}{dx^2} + \frac{Q_{,}}{dx^2}\right) \\ &= n\nu\cdot dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q_{,}}{dx^2}\right) \\ &= n\nu\cdot dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\right), \end{aligned}$$

weil $d^2Q_{,} = d^2Q$ ist. Deshalb erhält man für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0.$$

Was zu finden war.

Folgerung I. 41. Wenn also in der Formel des Maximums oder Minimums auch noch Differentiale zweiter Ordnung vorkommen, oder was dasselbe ist, wenn Z eine Function von x, y, p und q ist, sodass man

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$$

hat, so ist die Gleichung für die gesuchte Curve:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0;$$

man kann sie leicht aus dem Differentiale von Z bilden.

Folgerung II. 42. Wenn q, oder das zweite Differential von y, in Q vorkommt, dann enthält d^2Q Differentiale vierter Ordnung, und von dieser Art ist die Gleichung, welche man für die Curve findet. Die Curve kann daher durch vier gegebene Punkte gezogen werden.

Folgerung III. 43. Wenn also Q die Grösse q enthält, ist das Problem, damit es ein bestimmtes wird, so vorzulegen, dass unter allen durch vier gegebene Punkte gezogenen Curven diejenige ermittelt werden soll, für welche $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist.

Anmerkung I. 44. Nehmen wir an, dass q in Q nicht enthalten sei, und untersuchen wir, von welcher Ordnung die resultirende Differentialgleichung ist. Dies tritt ein, wenn die vorgelegte Formel des Maximums oder Minimums $\int Zq\,dx$ ist, wo Z eine Function von x, y und p allein bedeutet, sodass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ wird. Hieraus folgt:

$$d(Zq) = Mqdx + Nqdy + Pqdp + Zdq,$$

woraus sich für die gesuchte Curve die Gleichung ergiebt:

$$0 = Nq - \frac{Pdq + qdP}{dx}$$
$$+ \frac{dMdx + dNdy + dPdp + Nd^2y + Pd^2p}{dx^2}$$

oder

$$0 = 2\,Nq + \frac{dM + pdN}{dx}$$

oder

$$0 = 2\,Ndp + dM + pdN;$$

eine Gleichung, welche gleichbedeutend ist mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, weil $dp = \frac{d^2y}{dx^2}$ darin vorkommt.

Wenn man also eine Curve wünscht, in welcher $\int Zq\,dx$ ein Maximum oder Minimum sein soll, während Z eine Function von x, y und p und $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ ist, so erhält man für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$0 = dM + 2\,Ndp + pdN.$$

Folgerung IV. 45. Um zu der gefundenen Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

zurückzukehren, so wird sie offenbar allgemein integrabel, wenn $N = 0$ ist, wenn also y in Z nicht vorkommt, denn durch Integration geht hervor:

$$C - P + \frac{dQ}{dx} = 0.$$

Ist ausserdem $P = 0$, so gelingt eine zweite Integration, durch welche

$$Cx + D - Q = 0$$

hervorgeht.

Folgerung V. 46. Ist $M = 0$, so gelingt gleichfalls allgemein eine Integration. Es ist nämlich

$$dZ = Ndy + Pdp + Qdq.$$

Multiplicirt man nun die Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

mit dy oder $p\,dx$, wodurch man

$$Ndy - p\,dP + p\,\frac{d^2Q}{dx} = 0$$

erhält, und addirt dazu

$$dZ - Ndy - Pdp - Qdq = 0,$$

so entsteht:

$$dZ - pdP - Pdp + p.\frac{d^2Q}{dx} - Qdq = 0,$$

wovon

$$Z - Pp + p\,\frac{dQ}{dx} - Qq = C$$

das Integral ist.

Folgerung VI. 47. Ist $M = 0$ und $N = 0$, so ist zunächst wegen $N = 0$ wie oben:

$$C - P + \frac{dQ}{dx} = 0.$$

Nun ist $dZ = Pdp + Qdq$. Multiplicirt man daher jene Gleichung mit dp oder $q\,dx$, wodurch man

$$Cdp - Pdp + qdQ = 0$$

erhält, und addirt $Pdp + Qdq - dZ = 0$, so geht hervor:

$$Cdp + Qdq + qdQ - dZ = 0,$$

wovon

$$Cp + D + Qq - Z = 0$$

das Integral ist.

Anmerkung II. 48. Wenn man den Zusammenhang der Gleichung für die gesuchte Curve, für welche $\int Zdx$ den grössten oder kleinsten Werth hat, mit dem Differentiale von Z ins Auge fasst, so kann man eine Beziehung zwischen den Differentialen dy, dp und dq bestimmen, vermöge deren das Differential von Z gleich Null gesetzt gerade die Gleichung für die gesuchte Curve ergiebt. Es ist nämlich

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq.$$

Vergleicht man hiermit die Curvengleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0,$$

oder besser diese Gleichung multiplicirt mit $dy = pdx$:

$$Ndy - pdP + p\,\frac{d^2Q}{dx} = 0,$$

so erhellt, dass man in dem Differentiale von Z an Stelle von Mdx Null schreiben, das Glied Ndy unverändert lassen, $-pdP$ statt Pdp schreiben, und an Stelle von Qdq endlich $p\,\frac{d^2Q}{dx}$ setzen muss. Aber da dies a priori nicht klar ist, dürfte es vorzuziehen sein, die Form der gefundenen Gleichung beizubehalten, die man ja leicht im Gedächtniss behalten kann. Übrigens ist zu bemerken, dass die hierher gehörenden Aufgaben völlig neu und noch nicht von denen behandelt sind, welche sonst über diesen Gegenstand geschrieben haben.

Sonst pflegten nämlich die Schriftsteller nur solche Formeln des Maximums oder Minimums zu betrachten, in welchen höchstens die ersten Differentiale der Coordinaten enthalten waren. Deshalb wird es sich verlohnen, die Beschaffenheit dieser Probleme genau zu erforschen und besonders zu zeigen, wie die Curven, welche Genüge leisten, zu ihrer Bestimmung vier Punkte zulassen. Zu diesem Zweck schien es gut, die folgenden Beispiele hinzuzufügen und bei den einzelnen anzugeben, was zur Erläuterung beitragen kann.

Beispiel I. 49. Die Curve zu finden, in welcher

$$\int \frac{y^n d^2 y}{x^m dy}$$

ein Maximum oder Minimum ist.

[Die Lösung nach § 44 führt auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$0 = m(m+1)\, y^2 dy - 2\, mnxypdy + n(n-1)\, x^2 p^2 dy + mxy^2 dp + nx^2 yp\, dp.]$$

Anmerkung III. 50. Hier kann der Grund angegeben werden, warum solche Aufgaben, bei denen

$$\int Zq\, dx$$

ein Maximum oder Minimum sein soll, nur auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung führen und daher besser den Aufgaben des vorhergehenden Problems zuzurechnen sind, wenn Z eine Function von x, y und p ist. Durch Reduction der Integrale lässt sich nämlich die Formel $\int Zq\, dx$ oder

$$\int \frac{Z d^2 y}{dx}$$

auf die Form bringen:

$$Y + \int V dx,$$

wo Y und V Functionen von x, y und p allein sind, welche q nicht mehr enthalten. Da nun Y eine absolute Grösse ist und daher bei der Aufsuchung des Maximums oder Minimums gleichgültig bleibt, wird die Formel $\int Zq\, dx$ ein Maximum oder Minimum, wenn es $\int V dx$ wird, sodass solche Formeln $\int Zq\, dx$

sich auf das vorhergehende Problem zurückführen lassen; daher ist es nicht wunderbar, dass man für die Curven, welche Genüge leisten, nur eine Differentialgleichung zweiter Ordnung findet. Damit man aber die erwähnte Reduction der Formel $\int Zq\,dx$ oder $\int Z\,dp$ auf $Y + \int V dx$ besser versteht, nehmen wir an, es sei Y eine Function von x, y und p und

$$dY = \varrho\,dx + \sigma\,dy + \tau\,dp = (\varrho + \sigma p)\,dx + \tau\,dp.$$

Dann ist in Folge der Gleichheit von $\int Zdp$ und $Y + \int Vdx$:

$$Zdp = (\varrho + \sigma p)\,dx + \tau\,dp + Vdx,$$

woraus man schliesst, dass:

$$\tau = Z, \quad V = -\varrho - \sigma p$$

sein muss. Daher wird diese Reduction folgendermaassen vorgenommen. Man integrire die Formel Zdp bei constantem x und y; das Integral ist eine Function von x, y und p, welche Y heisse. Hierauf differentiire man diese Function Y bei constantem p. Dann giebt dies Differential negativ genommen Vdx, und V ist eine Function von x, y und p, welche q nicht enthält. So oft also eine solche Formel $\int Zdp$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, und Z eine Function von x, y und p allein ist, so oft lässt sich die Aufgabe, obwohl sie zu dem gegenwärtig behandelten Probleme zu gehören scheint, doch sofort auf das vorhergehende Problem zurückführen. —

Beispiel II. 51. Die Curve Am zu finden, welche mit ihrer Evolute AR und dem Krümmungsradius mR an jeder Stelle den kleinsten Raum ARm einschliesst.

Setzt man die Abscisse $AM = x$, die Ordinate $Mm = y$, so ist der Krümmungsradius

$$mR = -\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

die Area ARm aber gleich

$$\int \tfrac{1}{2}\, mR \cdot dx\, \sqrt{1 + p^2},$$

sodass die Formel:

$$\int \frac{(1 + p^2)^2\, dx}{q}$$

ein Minimum sein muss. Es ist daher

$$Z = \frac{(1+p^2)^2}{q}$$

und

$$dZ = \frac{4(1+p^2)\,p\,dp}{q} - \frac{(1+p^2)^2\,dq}{q^2},$$

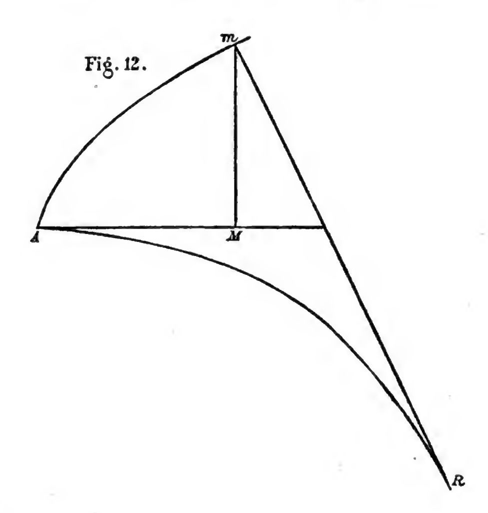


Fig. 12.

sodass

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = \frac{4(1+p^2)\,p}{q}, \quad Q = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}$$

wird. Da nun $M = 0$ und $N = 0$ ist, so hat man, nach Folgerung VI, als Gleichung für die gesuchte Curve:

$$Z = D + Cp + Qq$$

oder

$$\frac{(1+p^2)^2}{q} = D + Cp - \frac{(1+p^2)^2}{q},$$

das heisst

$$2(1+p^2)^2 = Dq + Cpq.$$

Da ferner $dp = q\,dx$ oder $q = \frac{dp}{dx}$ ist, so erhält man

$$2\,dx = \frac{D + Cp}{(1 + p^2)^2}\,dp,$$

wovon das Integral ist:

$$x = \frac{a}{1 + p^2} + 2b\int\frac{dp}{(1 + p^2)^2}$$
$$= \frac{a + bp}{1 + p^2} + b\int\frac{dp}{1 + p^2} + c.$$

Indem man die Constanten geeignet verändert, hat man also

$$x = \frac{a + bp + cp^2}{1 + p^2} + b \operatorname{arc\,tg} p.$$

Weil ferner $dy = p\,dx$ ist, wird

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp$$
$$= \frac{ap + bp^2 + cp^3}{1 + p^2} + bp \operatorname{arctg} p - \int\frac{a + bp + cp^2}{1 + p^2}\,dp - b\int dp \operatorname{arctg} p$$
$$= \frac{ap + bp^2 + cp^3}{1 + p^2} - \int\frac{(a + cp^2)\,dp}{1 + p^2},$$

da

$$b\int dp \operatorname{arc\,tg} p = bp \operatorname{arc\,tg} p - b\int\frac{p\,dp}{1 + p^2}$$

ist. Hieraus folgt:

$$y = f + \frac{ap + bp^2 + cp^3}{1 + p^2} + (c - a) \operatorname{arc\,tg} p - cp$$
$$= \frac{f + (a - c)\,p + (b + f)\,p^2}{1 + p^2} + (c - a) \operatorname{arc\,tg} p.$$

Hiermit sind die Werthe von x und y ausgedrückt durch p gefunden, und es kann somit die gesuchte Curve durch vier gegebene Punkte gezogen und construirt werden. Um aber die Beschaffenheit der Curve zu erkennen, eliminire man $\operatorname{arctg} p$. Es ist:

$$\operatorname{arc\,tg} p = \frac{x}{b} - \frac{\frac{a}{b} + p + \frac{c}{b} p^2}{1 + p^2} = \frac{y}{c-a} - \frac{\frac{f}{c-a} + p + \frac{b+f}{c-a} p^2}{1 + p^2},$$

und daher:

$$(c-a)x - by = \frac{ac - a^2 - bf + 2b(c-a)p + (c^2 - ac - b^2 - bf)p^2}{1 + p^2}.$$

Da sich aber die Curve nicht ändert, wenn die Coordinaten um eine constante Grösse vermehrt oder vermindert werden, so ist

$$(c-a)x - by = \frac{b^2 - (c-a)^2 + 2b(c-a)p}{1 + p^2},$$

und wenn noch a an Stelle von $c-a$ gesetzt wird:

$$ax - by = \frac{b^2 - a^2 + 2abp}{1 + p^2}.$$

Zieht man jetzt die Constante b^2 ab, so ist

$$ax - by = \frac{-a^2 + 2abp - b^2 p^2}{1 + p^2}$$

und daher

$$\sqrt{by - ax} = \frac{bp - a}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Setzt man den Curvenbogen gleich w, so ist

$$dw = dx \sqrt{1 + p^2},$$

wodurch die Gleichung

$$dw = \frac{b\,dy - a\,dx}{\sqrt{by - ax}}$$

zum Vorschein kommt. Folglich ist

$$w = 2\sqrt{by - ax}.$$

Da nun $by - ax$ das Vielfache einer Abscisse auf einer anderen festen Axe ist, welcher immer noch das Quadrat des Bogens entspricht, so erkennt man, dass die gesuchte Curve eine Cycloide ist, welche durch vier gegebene Punkte bestimmt wird und unter allen durch die vier Punkte gezogenen Curven mit ihrer Evolute den kleinsten Raum einschliesst. Dieser Schluss wurde deshalb so schwierig, weil

die Cycloide der Aufgabe genügt, wenn man irgend eine Gerade als Axe annimmt, während die Gleichung für eine beliebige Axe ziemlich verwickelt ist. Hätten wir aber a oder b gleich Null gesetzt, wodurch die Allgemeinheit der Lösung nicht beschränkt worden wäre, so würde die Gleichung für die Cycloide sofort hervorgegangen sein[26]).

Beispiel III. 52. Die Curve zu finden, in welcher

$$\int \varrho^n \, dw$$

ein Maximum oder Minimum ist, wobei ϱ den Krümmungsradius und w das Bogenelement der Curve bezeichnet.

[Lösung nach § 47:

$$dx = dp \sqrt[n]{\frac{C + Dp}{(1+p^2)^{(3n+1):2}}},$$

$$dy = p\,dp \sqrt[n]{\frac{C + Dp}{(1+p^2)^{(3n+1):2}}}.]$$

Beispiel IV. 53. Die Curve zu finden, in welcher der Werth der Formel:

$$\int \frac{y\,dy\,dx^2}{d^2 y}$$

am kleinsten ist.

[Lösung nach § 46:

$$\frac{a\,dp}{p^2} = \frac{dy}{q} - \frac{2\,y\,dq}{q^2},$$

eine Differentialgleichung, die sich in geschlossener Form nicht integriren lässt.]

Beispiel V. 54. Die Curve zu finden, in welcher der Werth der Formel

$$\int q^n \, dx$$

oder

$$\int \frac{(d^2 y^n)}{dx^{2n-1}}$$

am kleinsten oder grössten ist.

[Lösung:

$$y = (\alpha x + \beta)^{(2n-1):(n-1)} + \gamma x + \delta.]$$

Beispiel VI. 55. Die Curve zu finden, in welcher

$$\int \frac{x\,p\,dx}{y\,q}$$

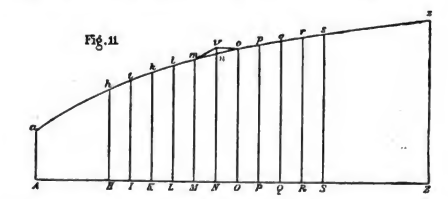
am grössten oder kleinsten ist.

[Lösung: eine Differentialgleichung vierter Ordnung; das Beispiel soll zeigen, dass die in § 44—47 auseinandergesetzten Zurückführungen auf Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung nicht immer möglich sind.]

Aufgabe V. 56. Die Curve zu finden, in welcher der Werth von $\int Z dx$ am grössten oder kleinsten ist, wenn Z eine Function ist, die Differentiale beliebiger Ordnung in sich schliesst, sodass man hat:

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + T dt + \ldots$$

Lösung. Da die Verschiebung des Punktes n nach ν die vorhergehenden Elemente mehr als die folgenden beeinflusst, — denn nur das eine folgende Element wird dadurch beeinflusst, während ihre Wirkung auf die vorhergehenden sich um so weiter erstreckt, je höher die Ordnung der vor-



handenen Differentiale ist — deshalb ist es vortheilhaft, eine vorhergehende Ordinate, etwa Hh, als erste anzunehmen, sodass die Änderung, welche von der Hinzufügung des Stückchens $n\nu$ zu der Ordinate Nn herrührt, sich nicht über Hh hinaus bemerkbar macht; das geschieht, wenn die Differentiale in Z nicht über die sechste Ordnung aufsteigen. Es genügt

aber den Werth von dZ bis zum Gliede Tdt zu erstrecken, weil aus der Lösung für diesen Fall leicht erschlossen wird, wie sie sich bei der Anwesenheit von beliebig vielen Gliedern gestaltet. Da übrigens die vorliegende Aufgabe alle vorhergehenden in sich enthält, so wird man immer dieselbe Lösung erhalten, welche Ordinate man auch um ein unendlich kleines Stückchen $n\nu$ vermehrt. Es sei also $AH = x$ und $Hh = y$. Den einzelnen Punkten der Abscisse $H, I, K, L, M, N, O, \ldots$ entsprechen dann folgende Werthe der Buchstaben $p, q, r, s, t, \ldots$:

$$\begin{array}{rllllll} H: & y, & p, & q, & r, & s, & t; \\ I: & y', & p', & q', & r', & s', & t'; \\ K: & y'', & p'', & q'', & r'', & s'', & t''; \\ L: & y''', & p''', & q''', & r''', & s''', & t'''; \\ M: & y^{IV}, & p^{IV}, & q^{IV}, & r^{IV}, & s^{IV}, & t^{IV}; \\ N: & y^{V}, & p^{V}, & q^{V}, & r^{V}, & s^{V}, & t^{V}. \end{array}$$

Diese einzelnen Werthe erleiden in Folge der Verschiebung von n nach ν folgende Änderungen, wie sich aus dem ersten Lehrsatze bei geeigneter Veränderung der Zeichen ergiebt:

$$\begin{array}{lll} dy = 0 & dy' = 0 & dy'' = 0 \\ dp = 0 & dp' = 0 & dp'' = 0 \\ dq = 0 & dq' = 0 & dq'' = 0 \\ dr = 0 & dr' = 0 & dr'' = +\frac{n\nu}{dx^3} \\ ds = 0 & ds' = +\frac{n\nu}{dx^4} & ds'' = -\frac{4n\nu}{dx^4} \\ dt = +\frac{n\nu}{dx^5} & dt' = -\frac{5n\nu}{dx^5} & dt'' = +\frac{10n\nu}{dx^5} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} dy''' = 0 & dy^{IV} = 0 & dy^{V} = +n\nu \\ dp''' = 0 & dp^{IV} = +\frac{n\nu}{dx} & dp^{V} = -\frac{n\nu}{dx} \\ dq''' = +\frac{n\nu}{dx^2} & dq^{IV} = -\frac{2n\nu}{dx^2} & dq^{V} = +\frac{n\nu}{dx^2} \\ dr''' = -\frac{3n\nu}{dx^3} & dr^{IV} = +\frac{3n\nu}{dx^3} & dr^{V} = -\frac{n\nu}{dx^3} \\ ds''' = +\frac{6n\nu}{dx^4} & ds^{IV} = -\frac{4n\nu}{dx^4} & ds^{V} = +\frac{n\nu}{dx^4} \\ dt''' = -\frac{10n\nu}{dx^5} & dt^{IV} = +\frac{5n\nu}{dx^5} & dt^{V} = -\frac{n\nu}{dx^5}. \end{array}$$

Da ferner zur Abscisse AH ein Werth der Formel

$$\int Z\,dx$$

gehört, welcher durch die Verschiebung des Punktes n nach ν nicht geändert wird, so entsprechen den folgenden Elementen der Abscisse die Werthe der Formel $\int Zdx$, welche diese Tabelle angiebt:

Element	: HI,	IK,	KL,	LM,	MN,	NO.
entsprechender Werth	: Zdx,	$Z'dx$,	$Z''dx$,	$Z'''dx$,	$Z^{IV}dx$,	$Z^{V}dx$.

Um die Änderungen zu finden, welche aus der Verschiebung des Punktes n nach ν hervorgehen, muss man die einzelnen Werthe differentiiren und an Stelle der Differentiale dy, dp, dq, dr, ds, dt und der daraus hergeleiteten die oben angegebenen Ausdrücke mit $n\nu$ einsetzen. Man erhält dann, wie folgt:

$$d(Z\,dx) = n\nu \cdot dx \cdot \frac{T}{dx^5},$$

$$d(Z'dx) = n\nu \cdot dx\left(\frac{S'}{dx^4} - \frac{5\,T'}{dx^5}\right),$$

$$d(Z''dx) = n\nu \cdot dx\left(\frac{R''}{dx^3} - \frac{4\,S''}{dx^4} + \frac{10\,T''}{dx^5}\right),$$

$$d(Z'''dx) = n\nu \cdot dx\left(\frac{Q'''}{dx^2} - \frac{3\,R'''}{dx^3} + \frac{6\,S'''}{dx^4} - \frac{10\,T'''}{dx^5}\right),$$

$$d(Z^{IV}dx) = n\nu \cdot dx\left(\frac{P^{IV}}{dx} - \frac{2\,Q^{IV}}{dx^2} + \frac{3\,R^{IV}}{dx^3} - \frac{4\,S^{IV}}{dx^4} + \frac{5\,T^{IV}}{dx^5}\right),$$

$$d(Z^{V}dx) = n\nu \cdot dx\left(N^{V} - \frac{P^{V}}{dx} + \frac{Q^{V}}{dx^2} - \frac{R^{V}}{dx^3} + \frac{S^{V}}{dx^4} - \frac{T^{V}}{dx^5}\right).$$

Da allein die genannten Elemente von der Verschiebung des Punktes n nach ν beeinflusst werden, giebt die Summe dieser Änderungen den ganzen Differentialwerth, welcher zu der auf die ganze Abscisse AZ erstreckten Formel gehört. Er ist also:

$$nv \cdot dx \left[+ N^{v} - \frac{P^{v} - P^{iv}}{dx} + \frac{Q^{v} - 2\,Q^{iv} + Q'''}{dx^2} - \frac{R^{v} - 3\,R^{iv} + 3\,R''' - R''}{dx^3} + \frac{S^{v} - 4\,S^{iv} + 6\,S''' - 4\,S'' + S'}{dx^4} - \frac{T^{v} - 5\,T^{iv} + 10\,T''' - 10\,T'' + 5\,T' - T}{dx^5} \right].$$

Die einzelnen Glieder lassen sich aber bequem und kurz durch Differentiale ausdrücken, denn es ist:

$$\begin{aligned}
&P^{v} - P^{iv} = dP^{iv},\\
&Q^{v} - 2\,Q^{iv} + Q''' = d^2 Q''',\\
&R^{v} - 3\,R^{iv} + 3\,R''' - R'' = d^3 R'',\\
&S^{v} - 4\,S^{iv} + 6\,S''' - 4\,S'' + S' = d^4 S',\\
&T^{v} - 5\,T^{iv} + 10\,T''' - 10\,T'' + 5\,T' - T = d^5 T,
\end{aligned}$$

Deshalb wird der Differentialwerth der Formel $\int Z dx$, welcher von dem Stückchen nv herrührt, gleich:

$$nv \cdot dx \left(N^{v} - \frac{dP^{iv}}{dx} + \frac{d^2 Q'''}{dx^2} - \frac{d^3 R''}{dx^3} + \frac{d^4 S'}{dx^4} - \frac{d^5 T}{dx^5} \right).$$

Hier aber können, weil alle Glieder gleichartig sind, die Indices weggelassen werden, denn der Unterschied zwischen N^{v} und N, dP^{iv} und dP u. s. w. verschwindet. Deshalb erhält man für die Formel $\int Z dx$ den Differentialwerth:

$$nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \frac{d^5 T}{dx^5} \right),$$

woraus man zugleich für den Fall, dass in Z höhere Differentiale vorkommen, die Form des zugehörigen Differentialwerthes erschliessen kann. Wenn man daher die Curve sucht, welche das grösste oder kleinste $\int Z dx$ für eine gegebene Abscisse hat, und wenn sich

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + T dt + \ldots$$

ergiebt, so ist der Differentialwerth der Formel $\int Z dx$ gleich

$$nv\cdot dx\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-\frac{d^5T}{dx^5}+\cdots\right),$$

und hieraus entsteht für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-\frac{d^5T}{dx^5}+\cdots.$$

Was zu finden war.

Folgerung I. 57. In der Formel $\int Zdx$, wie wir sie behandelt haben, enthält die Grösse Z Differentiale fünfter Ordnung, wenn nur in dem Differential von Z:

$$dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+Sds+Tdt$$

das Glied Tdt das letzte ist. Da also in T noch Differentiale fünfter Ordnung vorkommen, leuchtet ein, dass die Differentialgleichung für die gesuchte Curve von der zehnten Ordnung ist.

Folgerung II. 58. Hieraus erkennt man, dass die Ordnung der Differentialgleichung für die Curve immer das Doppelte der Ordnung ist, welche die Formel des Maximums oder Minimums hat. Wir setzen nämlich voraus, dass in dem Gliede Tdt die Grösse T noch t in sich enthält, denn sonst würde die Gleichung um zwei Stufen heruntergedrückt werden, wie man aus § 50 schliessen kann.

Folgerung III. 59. Wenn also Z Differentiale n-ter Ordnung enthält, dann ist die Differentialgleichung für die Curve von der Ordnung $2n$, und deshalb enthält sie potentiell ebensoviele neue Constanten in sich.

Folgerung IV. 60. Damit das Problem zu einem bestimmten wird, muss man ebensoviele Punkte vorschreiben, als willkürliche Constanten vorhanden sind, sodass das Problem, wenn es ein bestimmtes sein soll, so ausgesprochen werden muss: Unter allen Curven, welche durch $2n$ gegebene Punkte gehen, soll man die bestimmen, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist; wenn nämlich die Grösse Z Differentiale n-ter Ordnung in sich enthält.

Folgerung V. 61. Da n eine ganze Zahl ist, so ist die Anzahl der Punkte, durch welche das Problem zu einem bestimmten gemacht wird, immer eine gerade. Es werden also 0, 2, 4, 6, 8, ... Punkte zur Bestimmung des Problems erfordert.

Anmerkung I. Nach der Ordnung der Differentialität, bis zu welcher die gefundene Gleichung aufsteigt, oder

nach der Anzahl der Punkte, durch welche die Curve hindurchgehen soll, lassen sich die Probleme dieser Art bequem in Klassen eintheilen. Zur ersten Klasse gehören also die Probleme, bei denen ohne weiteres nach der Curve gefragt wird, welche für eine gegebene Abscisse den grössten oder kleinsten Werth von $\int Z dx$ hat; solche Probleme giebt die zweite Aufgabe, aber auch die dritte liefert sie in den Fällen, welche wir §§ 26 und 37 auseinandergesetzt haben; in ihnen giebt nämlich die Lösung eine bestimmte Curve, welche der Aufgabe Genüge leistet. Die zweite Klasse umfasst die Probleme, deren Lösung zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung führt; sie erfordern zwei Punkte zu ihrer Bestimmtheit und müssen so vorgelegt werden, dass unter allen Curven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, die bestimmt werden soll, in welcher $\int Z dx$ am grössten oder kleinsten ist; die Lösung dieser Probleme haben wir in der dritten Aufgabe gegeben. Weiter rechnen zur dritten Klasse die Probleme, welche in der vierten Aufgabe behandelt wurden; bei ihnen soll unter allen Curven, welche durch vier gegebene Punkte gehen, die bestimmt werden, welche das grösste oder kleinste $\int Z dx$ hat. In ähnlicher Weise erfordert die vierte Klasse zu ihrer Bestimmtheit sechs Punkte, die fünfte acht u. s. w.; alle diese Klassen haben wir in der gegenwärtigen Aufgabe umfasst. Obgleich aber die gefundene Gleichung bis zu einer so grossen Ordnung der Differentiale aufsteigt, so lässt sie doch oft allgemein eine oder mehrere Integrationen zu; einige Fälle dieser Art haben wir schon bei den vorhergehenden Aufgaben auseinandergesetzt. Deshalb wollen wir zusehen, in welchen Fällen unsere allgemeine Gleichung eine oder mehrere Integrationen gestattet, damit man bei vorkommenden Beispielen sofort erkennen kann, ob sie in diesen Fällen enthalten sind oder nicht. Solche Fälle sind aber hauptsächlich die beiden, in denen entweder $N = 0$ oder $M = 0$ ist, und von ihnen hängen noch andere Fälle ab, welche wir hier entwickeln wollen.

Fall I. 63. In der Formel des Maximums oder Minimums $\int Z dx$ sei das Glied N gleich 0, sodass

$$dZ = M dx + P dp + Q dq + R dr + S ds + \dots.$$

ist. Die Gleichung für die Curve ist also:

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \ldots\ldots$$

Multiplicirt man sie mit dx, so wird sie integrabel, und es geht hervor:

$$0 = A - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \ldots\ldots$$

Fall II. 64. Es sei $N = 0$ und $P = 0$, sodass

$$dZ = Mdx + Qdq + Rdr + Sds + \ldots$$

ist. Da N verschwindet, gelingt bereits eine Integration, und man hat für die gesuchte Curve die eben gefundene Gleichung, welche für $P = 0$ lautet:

$$0 = A + \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \ldots\ldots$$

Multiplicirt man sie mit dx, so lässt sie sich abermals integriren, und es ist:

$$0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \frac{d^3T}{dx^3} + \ldots\ldots$$

Fall III. 65. Ist $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, sodass man

$$dZ = Mdx + Rdr + Sds + Tdt + \ldots$$

hat, so folgt aus dem Verschwinden von N und P die zweimal integrirte Gleichung:

$$0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \frac{d^3T}{dx^3} + \ldots\ldots$$

Wird in ihr $Q = 0$ gesetzt, so ergiebt sich nach Multiplication mit dx die dreimal integrirte Gleichung:

$$0 = \tfrac{1}{2}Ax^2 - Bx + C - R + \frac{dS}{dx} - \frac{d^2T}{dx^2} + \ldots\ldots$$

Es ist klar, dass, wenn auch noch R verschwindet, eine vierte Integration statt hat u. s. w.

Fall IV. 66. Es sei $M = 0$, sodass

$$dZ = Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \ldots$$

ist. Als Gleichung für die gesuchte Curve ging früher hervor:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \ldots\ldots$$

Multiplicirt man sie mit $dy = p\,dx$ und addirt

$$dZ - Ndy - Pdp - Qdq - Rdr - Sds - \ldots,$$

so kommt die Gleichung:

$$0 = dZ - pdP + p\frac{d^2Q}{dx} - p\frac{d^3R}{dx^2} + p\frac{d^4S}{dx^3} - \ldots$$
$$- Pdp - Qdq - Rdr - Sds - \ldots,$$

deren Integral man angeben kann, es ist nämlich:

$$0 = A + Z - Pp + p\frac{dQ}{dx} - p\frac{d^2R}{dx^2} + p\frac{d^3S}{dx^3} - \ldots$$
$$- Qq + q\frac{dR}{dx} - q\frac{d^2S}{dx^2} + \ldots$$
$$- Rr + r\frac{dS}{dx} - \ldots$$
$$- Ss + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder:

$$0 = A + Z - Pp + \frac{pdQ - Qdp}{dx} - \frac{pd^2R - dp\,dR + Rd^2p}{dx^2}$$
$$+ \frac{pd^3S - dp\,d^2S + dSd^2p - Sd^3p}{dx^3} - \ldots;$$

wie es weiter geht, wenn in dZ auch die folgenden Differentiale Tdt, Udu, ... vorkommen, ist von selbst klar.

Fall V. 67. Es sei $M = 0$ und $N = 0$, sodass

$$dZ = Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \ldots$$

ist. Weil $N = 0$ ist, lässt sich eine Integration nach Fall I ausführen, und es ist:

$$0 = A - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \ldots.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $dp = q\,dx$ und addirt zu ihr

$$0 = -dZ + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \ldots,$$

so geht die integrable Gleichung:

$$0 = Adp - dZ + qdQ - q\frac{d^2R}{dx} + q\frac{d^3S}{dx^2} - \ldots$$
$$+ Qdq + Rdr + Sds + \ldots$$

hervor, deren Integral ist:

$$0 = Ap - B - Z + Qq - q\frac{dR}{dx} + q\frac{d^2S}{dx^2} - \dots$$
$$+ Rr - r\frac{dS}{dx} + \dots$$
$$+ Ss - \dots$$
$$\dots\dots\dots$$

oder:

$$0 = Ap - B - Z + Qq - \frac{qdR - Rdq}{dx}$$
$$+ \frac{qd^2S - dqdS + Sd^2q}{dx^2} - \dots$$

Fall VI. 68. Es sei $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, sodass

$$dZ = Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \dots$$

ist. Wegen $N = 0$ und $P = 0$ haben nach Fall II zwei Integrationen statt, und die Gleichung für die gesuchte Curve ist:

$$0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots$$

Multiplicirt man sie mit $dq = rdx$ und addirt

$$0 = dZ - Qdq - Rdr - Sds - Tdt - \dots,$$

so erhält man die von neuem integrable Gleichung:

$$0 = Axdq - Bdq + dZ - rdR + r\frac{d^2S}{dx} - r\frac{d^3T}{dx^2} + \dots$$
$$- Rdr - Sds - Tdt - \dots,$$

deren Integral ist:

$$0 = Axq - Bq + C + Z - Rr + r\frac{dS}{dx} - r\frac{d^2T}{dx^2} + \dots$$
$$- Ap \qquad - Ss + s\frac{dT}{dx} - \dots$$
$$- Tt + \dots$$
$$\dots\dots\dots$$

oder:

$$0 = A(xq - p) - Bq + C + Z - Rr + \frac{rdS - Sdr}{dx}$$
$$- \frac{rd^2T - drdT - Td^2r}{dx^2} + \dots$$



Fall VII. 69. Es sei $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, sodass

$$dZ = Rdr + Sds + Tdt + \ldots$$

ist. Wegen $N = 0$ und $Q = 0$ liefert Fall III die dreimal integrirte Gleichung:

$$0 = \tfrac{1}{2}Ax^2 - Bx + C - R + \frac{dS}{dx} - \frac{d^2T}{dx^2} + \ldots.$$

Wird sie mit $dr = s\,dx$ multiplicirt, und

$$0 = -dZ + Rdr + Sds + Tdt + \ldots$$

addirt, so geht die Gleichung hervor:

$$0 = \tfrac{1}{2}Ax^2dr - Bxdr + Cdr - dZ + sdS - s\frac{d^2T}{dx} + \ldots$$
$$+ Sds + Tdt + \ldots..$$

Diese ergiebt integrirt:

$$0 = \tfrac{1}{2}Ax^2r - Bxr + Cr - D - Z + Ss - s\frac{dT}{dx} + \ldots.,$$
$$-Axq + Bq \qquad\qquad + Tt - \ldots$$
$$+Ap \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder:

$$0 = \tfrac{1}{2}A(x^2r - 2xq + 2p) - B(xr - q) + Cr - D$$
$$- Z + Ss - \frac{sdT - Tds}{dx} + \ldots..$$

Anmerkung II. 70. Mittels dieser Fälle, deren Zahl man noch weiter vermehren könnte, wenn es bequem erscheinen sollte, lassen sich manche Aufgaben ziemlich rasch erledigen. Denn wenn ein Problem in einem der Fälle enthalten ist, welche an und für sich eine oder mehrere Integrationen gestatten, so kann man sofort eine Gleichung für die Curve bilden, welche schon ein- oder mehrmal integrirt ist und die sich deshalb leichter behandeln lässt. Damit dies deutlicher erhelle und damit zugleich die Anwendung der letzten Aufgabe, bei der in der Formel des Maximums oder Minimums Differentiale von höherer als der zweiten Ordnung vorkommen, erklärt werde, soll ein Beispiel beigebracht werden.

Beispiel. 71. Unter allen derselben Abscisse entsprechenden Curven die zu bestimmen, deren Evolute mit ihrer Evolute zwischen den Krümmungsradien der Evolute den grössten oder kleinsten Raum einschliesst.

[Lösung: Bei derselben Bezeichnung wie in § 51 ist die Formel des Maximums oder Minimums:

$$\int \frac{\varrho\, d\varrho^2}{dw} = \int \frac{(1+p^2)^2}{q}\, dx \left(9\, p^2 - \frac{6\,(1+p^2) r}{q^2} + \frac{(1+p^2)^2 r^2}{q^4}\right);$$

der Fall V findet statt, sodass die Differentialgleichung sechster Ordnung auf eine ausserordentlich complicirte der vierten Ordnung zurückgeführt werden kann.]

3.

Wie findet man unter allen Curven mit einer gemeinsamen Eigenschaft diejenige, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzt?

Erklärung I. 1. Eine gemeinsame Eigenschaft ist eine Integralformel oder ein unbestimmter Ausdruck, welcher allen Curven, unter denen man die gesuchte bestimmen soll, in gleicher Weise zukommt.

Anmerkung I. 2. Bis jetzt haben wir die absolute Methode der Maxima und Minima auseinandergesetzt, bei welcher immer unter der Gesammtheit aller zu einer und derselben Abscisse gehörenden Curven die gesucht wurde, welcher eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt. Jetzt aber gehen wir weiter zur relativen Methode und lehren, wie man eine Curve mit einer Maximal- oder Minimaleigenschaft bestimmt, nicht aus der Gesammtheit aller Curven, die zu derselben Abscisse gehören, sondern nur aus den immer noch unzählig vielen Curven, welchen eine oder mehrere vorgelegte Eigenschaften gemeinsam sind.

Zuerst werden wir in diesem Kapitel die zahllosen, derselben Abscisse entsprechenden Curven betrachten, welche eine gewisse Eigenschaft gemeinsam haben, und unter ihnen diejenige ermitteln, in welcher ein beliebiger unbestimmter Ausdruck den grössten oder kleinsten Werth annimmt. Von Aufgaben dieser Art ist besonders das isoperimetrische Problem berühmt, welches am Anfange des Jahrhunderts vorgelegt wurde und bei dem man unter allen Curven derselben Länge, die zu derselben Abscisse gehören, diejenige bestimmen sollte, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade in sich schliesst. Später wurde die Aufgabe in dem weiteren Sinne aufgefasst, dass die Bestimmung nicht bloss



unter allen Curven derselben Länge geschehen sollte, sondern unter allen Curven, die überhaupt irgend eine gemeinsame Eigenschaft besitzen, und gerade solche Aufgaben haben wir in diesem Kapitel zu behandeln unternommen.

Da nun die Curve nicht aus der Gesammtheit aller Curven ausgewählt werden soll, welche derselben Abscisse entsprechen, sondern nur aus denen, immer noch unendlich vielen, welchen eine vorgelegte Eigenschaft in gleicher Weise zukommt, so müssen wir vor allem die Eigenschaft selbst betrachten, welche wir hier mit dem Namen einer gemeinsamen Eigenschaft bezeichnen. Die gemeinsame Eigenschaft also, zum Beispiel die Gleichheit der Bogenlänge, muss auch allen Zwischenpunkten zukommen und ist daher eine unbestimmte Function, welche nicht durch ein Curvenelement, sondern durch die ganze Gestalt der Curve bestimmt wird. Deshalb ist diese gemeinsame Eigenschaft entweder eine einfache, nichtbestimmbare Integralformel oder ein Ausdruck, welcher mehrere solche Formeln umfasst; sie ist also ganz und gar ebenso beschaffen, wie die Formel oder der Ausdruck des Maximums oder Minimums selbst. Dieselben Verschiedenheiten und Eintheilungen also, welche wir vorher bezüglich der Formel des Maximums oder Minimums gemacht und behandelt haben, gelten auch in gleicher Weise für die gemeinsame Eigenschaft.

Folgerung I. 3. Ist also eine gemeinsame Eigenschaft B vorgelegt, so hat man alle Curven zu betrachten, zu welchen, für dieselbe gegebene Abscisse, derselbe Werth B gehört, und unter diesen muss man diejenige bestimmen, welche ein Maximum oder Minimum liefert.

Folgerung II. 4. Bei den hierher gehörenden Problemen müssen also zwei Dinge gegeben sein: die gemeinsame Eigenschaft B und der Ausdruck des Maximums oder Minimums A. Sind sie gegeben, so muss unter allen Curven, zu denen für dieselbe Abscisse derselbe Werth B gehört, diejenige bestimmt werden, welche ein Maximum oder Minimum liefert.

Folgerung III. 5. Es giebt aber nicht nur unendlich viele Curven, welche für eine gegebene Abscisse dieselbe gemeinsame Eigenschaft haben, sondern dies ist auch auf unendlich viele Arten möglich. Zu einer beliebig angenommenen Curve gehört nämlich ein bestimmter Werth der vorgelegten gemeinsamen Eigenschaft, ausser ihr aber giebt es noch unzählig viele andere Curven, welche für dieselbe Abscisse denselben Werth der gemeinsamen Eigenschaft ergeben.

Folgerung IV. 6. Ist also irgend ein nichtbestimmbarer Ausdruck vorgelegt, so giebt es unzählig viele Arten von unzählig vielen Curven, sodass jede Art die unendlich vielen Curven in sich fasst, welche für dieselbe Abscisse denselben Werth des Ausdruckes ergeben.

Folgerung V. 7. Da es also unendlich viele Arten giebt, von denen jede einzelne unzählig viele Curven umfasst, welchen ein als gemeinsame Eigenschaft vorgelegter Ausdruck in gleicher Weise zukommt, so giebt es in jeder Art eine Curve, welche gegenüber den anderen Curven der Art ein Maximum oder ein Minimum für den zweiten Ausdruck liefert.

Folgerung VI. 8. Da man also in jeder Art eine Curve findet, welche die Eigenschaft des Maximums oder Minimums besitzt, so findet man im ganzen unendlich viele Curven, welche Genüge leisten, und jede einzelne von ihnen besitzt unter allen, die sich derselben gemeinsamen Eigenschaft erfreuen, die Eigenschaft des Maximums oder Minimums.

Anmerkung II. 9. Das alles wird deutlicher werden wenn wir die gemeinsame Eigenschaft, über die wir bisher nur im allgemeinen sprachen, in bestimmter Weise annehmen. Es sei also die gemeinsame Eigenschaft die Formel, welche die Länge des Curvenbogens ausdrückt, der Ausdruck des Maximums oder Minimums aber sei $\int Z dx$, sodass unter allen Curven, bei denen zu derselben Abscisse die gleiche Bogenlänge gehört, die bestimmt werden soll, in welcher für dieselbe Abscisse $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum wird. Es ist aber klar, dass es nicht nur unendlich viele Curven giebt, welche für dieselbe Abscisse gleiche Bogenlänge haben, sondern dass dies auch auf unzählig viele Arten geschehen kann. Ist nämlich die gemeinsame Abscisse gleich a und wird die Bogenlänge c grösser als a angenommen, so kann man unzählig viele Linien, gerade und krumme, angeben, deren Länge immer gleich c ist, und unter diesen kann man die eine bestimmen, in welcher $\int Z dx$ am grössten oder kleinsten ist. An Stelle von c aber können unzählig viele Grössen angenommen werden, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass c grösser als a ist, und jeder dem c beigelegte Werth giebt eine Curve mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums. Für die unendlich vielen Werthe von c findet man also unendlich viele Curven, welche der Aufgabe genügen. Aber deshalb ist die Aufgabe nicht als eine unbe-

stimmte anzusehen, denn die Lösung, die unzählig viele Curven giebt, welche Genüge leisten, ist so aufzufassen, dass eine jede der gefundenen Curven unter allen gleich langen den grössten oder kleinsten Werth von $\int Z dx$ ergiebt.

Es leuchtet ein, dass, was hier über gleiche Curvenbogen gesagt wurde, auch für alle anderen Formeln oder nichtbestimmbaren Ausdrücke gelten muss. Wenn zum Beispiel unter allen Curven, die für eine gegebene Abscisse $x = a$ denselben Werth der Formel $\int Y dx$ ergeben, die gesucht wird, in welcher $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum ist, dann findet man zwar unendlich viele Curven, welche Genüge leisten, aber diese unterscheiden sich so von einander, dass eine jede unter allen anderen möglichen Curven, welche einen gemeinsamen Werth von $\int Y dx$ haben, den grössten oder kleinsten Werth der Formel $\int Z dx$ ergiebt.

Lehrsatz. 10. Wenn eine Curve unter der Gesammtheit aller zu derselben Abscisse gehörenden Curven eine vorgelegte Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzt, so hat sie zugleich diese Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade unter allen Curven, welche mit ihr irgend eine Eigenschaft gemeinsam haben.

Beweis. Der Ausdruck des Maximums oder Minimums sei A, die gemeinsame Eigenschaft B; A und B sind dann nichtbestimmbare Integralformeln oder zusammengesetzt aus mehreren solchen Formeln. Nehmen wir nun an, die Curve sei gefunden, welche unter der Gesammtheit aller zu derselben Abscisse gehörenden Curven den grössten oder kleinsten Ausdruck A liefert, so ergiebt sie auch einen gewissen Werth des Ausdruckes B, und ausser ihr giebt es unzählig viele andere Curven, welchen derselbe Werth des Ausdruckes B zukommt. Da nun alle diese unzähligen Curven unter der Gesammtheit aller Curven enthalten sind, aus denen man diejenige, für welche der Ausdruck A am grössten oder kleinsten ist, herausgefunden hat, so besitzt sie auch unter jenen unzähligen Curven, welche die Eigenschaft B gemeinsam haben, den grössten oder kleinsten Werth des Ausdruckes A. Was zu beweisen war.

Folgerung I. 11. Die absolute Methode ist also auch bei der Lösung von Problemen der relativen Methode von

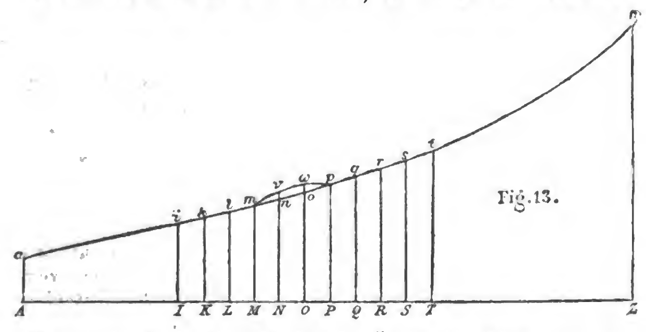
Nutzen, denn sie liefert immer eine Curve, welche Genüge leistet. Aber sie giebt nicht die vollständige Lösung.

Folgerung II. 12. Die Curve also, welche unter allen den grössten oder kleinsten Ausdruck A hat, ist eine der unzählig vielen Curven, welche unter allen mit der gemeinsamen Eigenschaft B für denselben Ausdruck A den grössten oder kleinsten Werth ergeben.

Folgerung III. 13. Die Lösung des Problems, unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft B die zu finden, in welcher A ein Maximum oder Minimum ist, erstreckt sich also weiter, als wenn man absolut unter allen Curven diejenige sucht, in welcher A ein Maximum oder Minimum ist, und jene Lösung enthält diese als besonderen Fall in sich.

Aufgabe I. 14. Man soll in ihren Hauptzügen die Methode der Lösung von Problemen schildern, bei denen unter allen Curven mit einer gemeinsamen Eigenschaft diejenige gesucht wird, welcher eine vorgelegte Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt.

Lösung. Jedes Maximum oder Minimum ist so beschaffen, dass sein Werth bei einer unendlich kleinen Änderung unverändert bleibt. Wenn daher die Curve az unter allen zu derselben Abscisse gehörigen Curven, welche die gemeinsame Eigenschaft B besitzen, den grössten oder kleinsten Werth des Ausdruckes A liefert, so behält sie denselben



Werth bei einer unendlich kleinen Änderung, welche die gemeinsame Eigenschaft B nicht stört. Hierzu genügt es aber nicht wie vorher, eine einzige Ordinate, etwa Nn, um ein

unendlich kleines Stück $n\nu$ zu vermehren, denn da eine solche Änderung durch eine einzige Bedingung bestimmt wird, kann man durch sie nicht bewirken, dass sowohl die gemeinsame Eigenschaft B, als auch der Ausdruck A des Maximnms oder Minimnms gleichmässig der ursprünglichen und der geänderten Curve zukommt. Man muss deshalb eine Änderung anwenden, welche durch zwei Bedingungen bestimmt ist, und das erreicht man, indem die beiden Ordinaten Nn und Oo nm die nnendlich kleinen Stücke $n\nu$ nnd $o\omega$ vermehrt werden.

Denkt man sich die Curve auf diese Weise geändert, so muss man zuerst bewirken, dass die gemeinsame Eigenschaft der ursprünglichen und der geänderten Curve in gleichem Maasse zukommt, nnd dann muss der Ausdruck des Maximums oder Minimums für jede von beiden Curven denselben Werth annehmen. Das erste leistet man, indem man den Differentialwerth des Ausdruckes ermittelt, durch welchen die gemeinsame Eigenschaft dargestellt wird, sofern dieser dnrch die Verschiebnng von n und o nach ν und ω entsteht, nnd ihn gleich Null setzt. Der zweiten Bedingung aber genügt man, indem man ebenso den Differentialwerth des Ausdruckes sucht, welcher ein Maximum oder Minimnm werden soll, sofern dieser durch die Verschiebnng von n nnd o nach ν und ω entsteht, und ihn gleich Null setzt. Auf diese Weise erhält man zwei Gleichungen, die eine vermöge der gemeinsamen Eigenschaft, die andere mittels des Ausdruckes des Maximums oder Minimums. Beide haben die Form

$$S \cdot n\nu + T \cdot o\omega = 0;$$

S und T sind auf die Curve bezügliche Grössen. Eliminirt man aus den beiden Gleichnngen $n\nu$ und $o\omega$, so erhält man eine Gleichnng für die gesuchte Curve, welche gegenüber allen anderen Cnrven mit der gemeinsamen Eigenschaft B den grössten oder kleinsten Werth des Ausdruckes A besitzt. Was zu finden war.

Folgerung I. 15. Die Lösung der Probleme kommt also auch auf die Ermittelnng von Differentialwerthen zurück; die jetzigen Differentialwerthe unterscheiden sich aber von den früher gegebenen dadurch, dass sie durch die Verschiebung zweier Curvenpnnkte zn bestimmen sind.

Folgernng II. 16. Bei jedem Probleme muss man also zwei solche Differentialwerthe ermitteln, welche aus den beiden Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ entstehen, den einen für die gemeinsame

Eigenschaft, den anderen für den Ausdruck des Maximums oder Minimums.

Folgerung III. 17. Hat man aber die beiden Differentialwerthe gefunden, so sind beide bei jedem Probleme gleich Null zu setzen. Hieraus entstehen zwei Gleichungen, und die Elimination von $n\nu$ und $o\omega$ liefert dann eine Gleichung, welche die Beschaffenheit der gesuchten Curve ausdrückt.

Folgerung IV. 18. Wenn mithin unter allen derselben Abscisse entsprechenden Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft B diejenige gesucht wird, in welcher der Ausdruck A am grössten oder kleinsten ist, dann hat man die Differentialwerthe der beiden Ausdrücke A und B, welche durch die beiden Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ entstehen, zu ermitteln und gleich Null zu setzen. Eliminirt man aus den beiden Gleichungen $n\nu$ und $o\omega$, so kommt eine Gleichung für die gesuchte Curve zum Vorschein.

Folgerung V. 19. Bei dem angegebenen Verfahren werden die beiden Ausdrücke A und B ganz gleichmässig behandelt, und es kommt nicht in Betracht, welcher von beiden die gemeinsame Eigenschaft oder das Maximum oder Minimum bezeichnet. Hieraus erhellt, dass dieselbe Lösung hervorgehen muss, wenn die Ausdrücke A und B unter einander vertauscht werden.

Folgerung VI. 20. Dieselbe Lösung also hat statt, wenn unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft B diejenige gesucht wird, in welcher A ein Maximum oder Minimum ist, oder wenn umgekehrt unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft A diejenige gesucht wird, in welcher B ein Maximum oder Minimum ist.

Anmerkung. 21. Dass die beiden Ausdrücke A und B, wenn sie auch für sich betrachtet ganz verschiedene Dinge bezeichnen, unter einander vertauschbar sind, erhellt auch von selbst aus der Beschaffenheit der Lösung. Betrachten wir nämlich die beiden Stückchen $n\nu$ und $o\omega$, um welche die Ordinaten Nn und Oo vermehrt werden, so müssen sie zuerst so beschaffen sein, dass die gemeinsame Eigenschaft B in der ursprünglichen wie in der geänderten Curve denselben Werth hat, die gemeinsame Eigenschaft B muss eben gleichmässig den Curven $amnopz$ und $am\nu\omega pz$ zukommen. Ebenso muss man dann durch dieselben Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ bewirken, dass der Ausdruck A, welcher ein Maximum oder

Minimum sein soll, für die Curve *amnopz* wie für die Curve *amνωpz* denselben Werth erhält. Die gemeinsame Eigenschaft wie die Natur des Maximums oder Minimums führen also genau dieselbe Bedingung in die Rechnung ein; es ist daher klar, dass die beiden gegebenen Ausdrücke, von denen der eine die gemeinsame Eigenschaft, der andere die Natur des Maximums oder Minimums darstellt, unter sich vertauscht werden können, unbeschadet der Lösung. Deshalb genügt es bei der Lösung solcher Probleme jene beiden Ausdrücke zu kennen, und um die Lösungen durchzuführen braucht man nicht zu wissen, welcher von beiden die gemeinsame Eigenschaft oder das Maximum oder Minimum bezeichnet.

Sucht man zum Beispiel unter allen Curven gleicher Länge die, welche die grösste Area umfasst, so findet man dieselbe Curve, welche hervorgeht, wenn unter allen Curven mit gleicher Area die kürzeste oder die von der kleinsten Bogenlänge gesucht wird.

So verhält es sich, wenn die Natur des gesuchten Maximums oder Minimums so beschaffen ist, dass sein Differentialwerth Null ist. Wir bemerkten aber schon oben, dass es Maxima und Minima von zwei verschiedenen Arten giebt, je nachdem der Differentialwerth Null oder Unendlich ist. Hier aber betrachten wir nur die Maxima und Minima der ersten Art, denn bei der relativen Methode kann die zweite Art gar nicht statt haben. Wenn nämlich der Differentialwerth, welcher dem Ausdrucke des Maximums oder Minimums zukommt, unendlich gross gesetzt wird, so findet man aus ihm allein eine Gleichung für die Curve, und deshalb tritt die gemeinsame Eigenschaft gar nicht in die Rechnung ein. Wenn also ein Maximum oder Minimum dieser Art bei der absoluten Methode statt hat, so erfreut sich dieselbe Curve bei der relativen Methode derselben Eigenschaft, welche gemeinsame Eigenschaft auch hinzugenommen wird.

Da mithin bei der Lösung solcher Probleme alles auf die Ermittelung der Differentialwerthe ankommt, welche aus den beiden Stücken *nν* und *oω* entstehen, wollen wir nunmehr eine Methode auseinandersetzen, solche Differentialwerthe für beliebige unbestimmte Ausdrücke durch ein ähnliches Verfahren zu finden, wie wir es oben benutzten, um die Differentialwerthe zu finden, welche aus einem einzigen Stücke *nν* entstehen.

Aufgabe II. 22. Ist irgend ein unbestimmter Ausdruck vorgelegt, welcher sich auf die Abscisse AZ bezieht, so soll man seinen Differentialwerth finden, welcher aus der Verschiebung der beiden Curvenpunkte n und o nach ν und ω hervorgeht.

Lösung. Setzen wir die Abscisse $AI = x$, die Ordinate $Ii = y$, so ist:

$$Kk = y',\ Ll = y'',\ Mm = y''',\ Nn = y^{IV},$$
$$Oo = y^{V},\ Pp = y^{VI}, \ldots$$

Von diesen Ordinaten erleiden nur zwei, nämlich y^{IV} und y^{V}, eine Veränderung, da ihnen die Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ hinzugefügt werden. Es ist also der Differentialwerth der Ordinate y^{IV} gleich $n\nu$, der Ordinate y^{V} gleich $o\omega$, der übrigen Ordinaten gleich Null. Hieraus erhält man die Differentialwerthe der übrigen auf die Curve bezüglichen Grössen p, q, r, s, ..., soweit sie von den beiden Ordinaten y^{IV} und y^{V} abhängen. Da zum Beispiel $p = \frac{y'-y}{dx}$ ist, so ist der Differentialwerth von p gleich Null; ebenso von p' und p''. Aber da $p''' = \frac{y^{IV}-y'''}{dx}$ ist, so ist der Differentialwerth von p''' gleich $\frac{n\nu}{dx}$, und da $p^{IV} = \frac{y^{V}-y^{IV}}{dx}$ ist, so ist der Differentialwerth von p^{IV} gleich $\frac{o\omega}{dx} - \frac{n\nu}{dx}$, ferner ist der von p^{V} gleich $-\frac{o\omega}{dx}$. Da weiter $q = \frac{p'-p}{dx}$ ist, so ist der Differentialwerth von q'' gleich $\frac{n\nu}{dx^2}$, von q''' gleich $\frac{o\omega}{dx^2} - \frac{2n\nu}{dx^2}$, von q^{IV} gleich $-\frac{2o\omega}{dx^2} + \frac{n\nu}{dx^2}$, von q^{V} gleich $\frac{o\omega}{dx^2}$. Ähnlich kann man bei den folgenden Grössen r, s, ... und den daraus abgeleiteten verfahren, und so entsteht folgende Tabelle, welche die Differentialwerthe der einzelnen Grössen angiebt:

$$
\begin{array}{llll}
 & & & dr' = +\frac{n\nu}{dx^3} \\
 & & dq'' = +\frac{n\nu}{dx^2} & dr'' = -\frac{3n\nu}{dx^3} + \frac{o\omega}{dx^3} \\
 & dp''' = +\frac{n\nu}{dx} & dq''' = -\frac{2n\nu}{dx^2} + \frac{o\omega}{dx^2} & dr''' = +\frac{3n\nu}{dx^3} - \frac{3o\omega}{dx^3} \\
dy^{IV} = +n\nu & dp^{IV} = -\frac{n\nu}{dx} + \frac{o\omega}{dx} & dq^{IV} = +\frac{n\nu}{dx^2} - \frac{2o\omega}{dx^2} & dr^{IV} = -\frac{n\nu}{dx^3} + \frac{3o\omega}{dx^3} \\
dy^{V} = +o\omega & dp^{V} = -\frac{o\omega}{dx} & dq^{V} = \qquad + \frac{o\omega}{dx^2} & dr^{V} = \qquad - \frac{o\omega}{dx^3}
\end{array}
$$

. . . .

Man erkennt aus dieser Tabelle, dass in den Differentialwerthen ebensoviele mit $o\omega$ wie mit $n\nu$ multiplicirte Glieder vorkommen, und für beide die Coëfficienten übereinstimmen. Der Unterschied besteht darin, dass jedes mit $o\omega$ multiplicirte Glied zu einer Grösse gehört, welche unmittelbar auf diejenige folgt, zu welcher das ähnliche mit $n\nu$ multiplicirte Glied gehört. So findet man in dem Differentialwerthe von q''' das Glied: $-\frac{2n\nu}{dx^2}$ und in dem Differentialwerthe der folgenden Grösse q^{IV} das Glied: $-\frac{2o\omega}{dx^2}$. In den Differentialwerthen treten also zwei verschiedene Arten von Gliedern auf, von denen die einen $n\nu$, die anderen $o\omega$ enthalten, und es hat der Differentialwerth eines jeden unbestimmten Ausdruckes die Form:

$$n\nu \cdot I + o\omega \cdot K.$$

Es ist nun klar, dass das erste Glied $n\nu \cdot I$ der Differentialwerth desselben Ausdruckes ist, welcher entsteht, wenn man nur das Stückchen $n\nu$ betrachtet, und es ist daher $n\nu \cdot I$ gerade der Differentialwerth, den wir bereits für jeden beliebigen Ausdruck bestimmen lehrten, sodass nach den oben gegebenen Vorschriften dieses Glied für jeden unbestimmten Ausdruck angegeben werden kann. Was das zweite Glied $o\omega \cdot K$ betrifft, so gehören die einzelnen Glieder, in denen $o\omega$ vorkommt, zu Grössen, welche denen folgen, zu denen die ähnlichen Glieder mit $n\nu$ gehören, und daher ist klar, dass K der Werth ist, welchen I an der unmittelbar vorhergehenden Stelle annimmt, und dass man also $K = I$, hat. Da man nun das Glied $n\nu \cdot I$ vermöge der oben gegebenen Vorschriften ermitteln kann, so ist aus ihm auch das andere Glied $o\omega \cdot K = o\omega \cdot I$, bekannt. Ist also V irgend ein

unbestimmter Ausdruck, und soll der aus den beiden Stücken $n\nu$ und $o\omega$ hervorgehende Differentialwerth bestimmt werden, so setze man den Differentialwerth, welcher aus $n\nu$ allein hervorgeht, gleich $n\nu \cdot I$, dann ist der Differentialwerth, welcher aus den beiden Stücken $n\nu$ und $o\omega$ entsteht, gleich $n\nu \cdot I + o\omega \cdot I$, und lässt sich daher mit Hilfe der oben gegebenen Regeln leicht ermitteln[27]).

Folgerung I. 23. Von allen Ausdrücken, deren Differentialwerthe wir finden lehrten, wenn sie aus einem Stückchen $n\nu$ entstehen, können wir also jetzt auch die Differentialwerthe angeben, welche aus zwei Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ hervorgehen.

Folgerung II. 24. Diese Methode gilt also ebenso für die Ermittelung der Differentialwerthe von Ausdrücken, die unabhängig sind von der Grösse der Abscisse AZ, wie auch für solche, welche von der Länge dieser Abscisse abhängen.

Folgerung III. 25. Sogar, wenn der vorgelegte Ausdruck, welcher entweder die gemeinsame Eigenschaft darstellt oder ein Maximum oder Minimum sein soll, eine Function von zwei oder mehr Integralformeln ist, so lässt sich der Differentialwerth, welcher aus zwei Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ entsteht, durch dasselbe Verfahren bestimmen.

Anmerkung. 26. Wir sahen früher, dass der aus einem Stückchen $n\nu$ entstehende Differentialwerth irgend eines Ausdruckes immer die Form $n\nu \cdot dx \cdot T$ oder $n\nu \cdot Tdx$ hat, wo T eine endliche Grösse bezeichnet; deshalb ist der aus den beiden Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ entstehende Differentialwerth desselben Ausdruckes gleich $n\nu \cdot Tdx + o\omega \cdot T_{,}dx$, wie wir in der Lösung zeigten. Diese Gestalt lässt sich aber auch leicht so erschliessen. Setzt man $o\omega = 0$, so muss der aus dem einen Stückchen $n\nu$ entstehende Differentialwerth herauskommen, den zu finden wir oben lehrten; er wird $n\nu \cdot Tdx$ sein. Setzt man aber $n\nu = 0$ und betrachtet bloss das Stückchen $o\omega$, so findet man in ähnlicher Art wie oben den Differentialwerth, er ist aber nicht gleich $o\omega \cdot Tdx$; weil man nämlich das Stückchen $o\omega$ erst an der folgenden Stelle annimmt, muss man statt T den vorhergehenden Werth nehmen, sodass der Differentialwerth $o\omega \cdot T_{,}dx$ wird. Werden nun beide Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ zusammen betrachtet, so wird der Differentialwerth gleich

$$n\nu \cdot Tdx + o\omega \cdot T_{,}dx$$

sein, denn bei der Rechnung beeinflussen sich die Stückchen $n\nu$



und $o\omega$ nicht, jedes von beiden kann vielmehr immer für sich behandelt werden.

Um aber diese Bezeichnungsweise der früher angenommenen anzupassen, wollen wir annehmen, V sei irgend ein unbestimmter Ausdruck, welcher für die bestimmte Abscisse $AZ = a$ den Werth A annimmt, und sein aus dem Stückchen $n\nu$ entstehender Differentialwerth sei $n\nu \cdot dA$, wo dA dasselbe bezeichnet, was vorher Tdx. Auf die früher gezeigte Art kann man aus dem Ausdrucke V den Werth dA finden. Hat man ihn gefunden, so ist der Differentialwerth, welcher aus den beiden Stücken $n\nu$ und $o\omega$ entsteht, gleich

$$n\nu \cdot dA + o\omega \cdot dA_{,},$$

wo $dA_{,}$ dasselbe bezeichnet wie vorher $T_{,}dx$.

Obwohl es also für unseren Zweck durchaus nothwendig ist, die Differentialwerthe aufzusuchen, welche aus zwei Stückchen entstehen, so lässt sich doch die Lösung der hierhergehörenden Probleme darauf zurückführen, dass sie allein mit Hilfe der oben gefundenen Differentialwerthe erledigt wird, welche aus einem Stückchen $n\nu$ hervorgehen, wie bei der folgenden Aufgabe bald erhellen wird.

Aufgabe III. 27. Man soll unter allen auf dieselbe Abscisse AZ bezogenen Curven, welchen derselbe Werth des unbestimmten Ausdruckes W zukommt, die bestimmen, in welcher der Ausdruck V ein Maximum oder Minimum ist.

Lösung. Nehmen wir an, die Curve az genüge der Forderung, und der Ausdruck W nehme in ihr den bestimmten Werth B an, dann ist die Curve az gegenüber allen anderen auf dieselbe Abscisse AZ bezogenen Curven, in welchen der Ausdruck W denselben Werth erhält, so beschaffen, dass in ihr der Ausdruck V den grössten oder kleinsten Werth annimmt, welcher mit A bezeichnet werde. Um diese Curve zu finden, sei also die unbestimmte Abscisse $AI = x$, die entsprechende Ordinate $Ii = y$, und man denke sich die beiden Ordinaten Nn und Oo um die unendlich kleinen Stücke $n\nu$ und $o\omega$ vermehrt. Dann müssen die Differentialwerthe von W und V, welche aus der Hinzufügung dieser beiden Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ entstehen, gleich Null gesetzt werden, wie wir in Aufgabe I zeigten.

Es sei der Differentialwerth des Ausdruckes V, welcher durch das eine Stückchen $n\nu$ entsteht, $n\nu \cdot dA$ und der ent-

sprechende Differentialwerth des anderen Ausdruckes W gleich $n\nu \cdot dB$: diese Differentialwerthe wird man mittelst der früher gegebenen Vorschriften finden können. Betrachtet man jetzt zwei Stückchen $n\nu$ und $o\omega$, so ist der Differentialwerth von V gleich

$$n\nu \cdot dA + o\omega \cdot dA_,,$$

und der Differentialwerth des anderen Ausdruckes W:

$$n\nu \cdot dB + o\omega \cdot dB_,.$$

Um die gesuchte Curve zu finden, muss man also

$$n\nu \cdot dA + o\omega \cdot dA_, = 0$$

und

$$n\nu \cdot dB + o\omega \cdot dB_, = 0$$

setzen. Man multiplicire beide Gleichungen mit beliebigen Grössen, sodass man erhält:

$$n\nu \cdot \alpha dA + o\omega \cdot \alpha dA_, = 0,$$
$$n\nu \cdot \beta dB + o\omega \cdot \beta dB_, = 0.$$

Um die Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ zu eliminiren, bestimme man α und β so, dass sie den beiden Gleichungen:

$$\alpha dA + \beta dB = 0,$$
$$\alpha dA_, + \beta dB_, = 0$$

genügen. Da aber $\alpha dA + \beta dB = 0$ ist, so ist auch

$$\alpha_, dA_, + \beta_, dB_, = 0,$$

und vergleicht man dies mit

$$\alpha dA_, + \beta dB_, = 0,$$

so findet man, dass

$$\alpha_, = \alpha,\ \beta_, = \beta$$

sein muss[28]. Daher müssen die Grössen α und β Constanten sein, und zwar willkürliche Constanten. Nimmt man also für α und β willkürliche Constanten, so ist die Gleichung der Curve

$$\alpha dA + \beta dB = 0.$$

Dieselbe Gleichung geht hervor, wenn man nach der gewöhnlichen Methode $n\nu$ und $o\omega$ eliminirt. Denn es ist:

$$\frac{n\nu}{o\omega} = -\frac{dA_,}{dA} = -\frac{dB_,}{dB},$$

also

$$\frac{dA_{,}}{dA} = \frac{dB_{,}}{dB},$$

und daher auch

$$\frac{dA'}{dA} = \frac{dB'}{dB}.$$

Nun ist

$$dA' = dA + d^2A, \qquad dB' = dB + d^2B \text{ [29]},$$

mithin kommt

$$\frac{d^2A}{dA} = \frac{d^2B}{dB},$$

woraus durch Integration folgt:

$$l dA - l dB = l C$$

oder

$$dA = C dB,$$

was in die vorher gefundene Gleichung

$$\alpha dA + \beta dB = 0$$

übergeht, wenn man $C = -\frac{\beta}{\alpha}$ setzt.

Um das Problem zu lösen, muss man also die Differentialwerthe ermitteln für den Ausdruck W, welcher die gemeinsame Eigenschaft darstellt, und für den Ausdruck V, welcher ein Maximum oder Minimum sein soll, sie mit willkürlichen Constanten multiplicieren, und die Summe gleich Null setzen. Dann erhält man eine Gleichung, welche die Natur der gesuchten Curve ausdrückt.

Folgerung I. 28. Es genügt also zur Lösung der vorliegenden Aufgabe die Differentialwerthe zu kennen, welche aus einem einzigen Stückchen $n\nu$ entstehen, und wir haben oben gezeigt, wie man diese leicht finden kann.

Folgerung II. 29. [Hierzu muss man die Vorschriften benutzen, welche in Abschnitt 2, § 56 gegeben wurden[30].]

Folgerung III. 30. Ist also eine gemeinsame Eigenschaft W und ein Ausdruck des Maximums oder Minimums V vorgelegt, so muss man nach diesen Vorschriften den Differentialwerth jedes der beiden Ausdrücke ermitteln. Nachdem man sie gefunden hat, multiplicire man sie mit willkürlichen

Constanten und setze ihre Summe gleich Null. Auf diese Weise erhält man eine Gleichung für die gesuchte Curve.

Folgerung IV. 31. Wird unter der Gesammtheit aller derselben Abscisse AZ entsprechenden Curven diejenige gesucht, in welcher ein Ausdruck V den grössten oder kleinsten Werth erhält, so ergiebt sich dafür die Gleichung $dA = 0$, wenn dA den Differentialwerth des Ausdruckes V bezeichnet.

Folgerung V. 32. Wenn aber unter allen derselben Abscisse AZ entsprechenden Curven, welchen der Ausdruck W in gleicher Weise zukommt, diejenige gesucht wird, für welche der Ausdruck V den grössten oder kleinsten Werth hat, so findet man dafür die Gleichung:

$$\alpha dA + \beta dB = 0.$$

Folgerung VI. 33. Es ist also klar, dass die Curve, welche unter der Gesammtheit aller Curven das grösste oder kleinste V hat und deren Gleichung $dA = 0$ ist, in der Gleichung

$$\alpha dA + \beta dB = 0$$

enthalten ist, die eine Curve ausdrückt, welche unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft W das grösste oder kleinste V hat.

Folgerung VII. 34. In der Gleichung $\alpha dA + \beta dB = 0$, welche die Lösung liefert, ist eine willkürliche Constante enthalten, sie muss aber dadurch bestimmt werden, dass der Ausdruck W einen gegebenen Werth erhält.

Folgerung VIII. 35. So kann also das Problem gelöst werden, unter allen zu derselben Abscisse AZ gehörenden Curven, in welchen der Ausdruck W denselben gegebenen Werth annimmt, diejenige zu bestimmen, in welcher der Werth von V am grössten oder kleinsten ist.

Folgerung IX. 36. Hieraus erkennt man endlich, dass die Lösung des vorgelegten Problems übereinstimmt mit der Lösung des Problems, man solle unter allen derselben Abscisse AZ entsprechenden Curve diejenige finden, welche das grösste oder kleinste $\alpha V + \beta W$ hat. Obgleich diese Aufgabe zur absoluten Methode gehört, giebt sie doch gerade die Gleichung

$$\alpha dA + \beta dB = 0,$$

welche wir vorher fanden.

Anmerkung I. 37. Hieraus entnimmt man also nicht nur eine leichte und bequeme Methode, alle hierher gehörigen Aufgaben zu lösen, sondern man dringt auch tiefer in die Erkenntniss der Beschaffenheit dieser Probleme ein. Denn zuerst wird klar, was wir schon oben bewiesen, dass die Lösung dieselbe ist, sei es, dass man unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft W diejenige sucht, welche das grösste oder kleinste V hat, sei es, dass man umgekehrt unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft V diejenige verlangt, in welcher W ein Maximum oder Minimum ist.

Ferner sieht man ein, dass die Aufgabe so vorgelegt werden kann, dass sie sich mittelst der absoluten Methode der Maxima oder Minima lösen lässt, denn das vorgelegte Problem stimmt mit dem überein, unter der Gesammtheit aller auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven diejenige zu finden, in welcher der Ausdruck $\alpha V + \beta W$ ein Maximum oder Minimum ist, und diese Umformung des Problems ist der Grund, warum man seine Lösung durch Differentialwerthe bewerkstelligen kann, die aus einem Stückchen $n\nu$ entstehen, und warum man nicht weiter zwei solche Stückchen braucht, wie es beim ersten Anblicke die Natur der Frage zu erfordern schien. Diese Übereinstimmung werden wir aber späterhin direkt und ohne jene Methode, bei welcher zwei Stückchen betrachtet werden, beweisen, wodurch die eben erkannte, überaus wichtige Wahrheit noch mehr bekräftigt werden wird.

Um Aufgaben der betrachteten Art zu lösen, muss man übrigens die früher gegebenen Vorschriften vor Augen haben, mit deren Hülfe man bei jeder gegebenen Aufgabe den Differentialwerth des Ausdruckes des Maximums oder Minimums und der gemeinsamen Eigenschaft ermitteln kann. Hat man aber beide gefunden, so kann man die Gleichung für die Curve sofort bilden, wozu nur nöthig ist, dass man die Summe beliebiger Vielfachen der beiden Differentialwerthe gleich Null setzt.

Anmerkung II. 38. Wir haben schon bemerkt, dass die Gleichung

$$\alpha dA + \beta dB = 0,$$

welche durch die Lösung unmittelbar gegeben wird, eine constante Grösse enthält, die aber nicht willkürlich ist, sondern aus der vorgelegten Bedingung bestimmt wird. Da nämlich allen Curven, unter denen die gesuchte zu bestimmen

ist, derselbe Werth von W zukommen, oder dieser Ausdruck in allen Curven denselben Werth, etwa B, annehmen soll, so lässt sich die Grösse B als gegeben ansehen, und da sie selbst in die Rechnung nicht eintritt, so sind die Constanten α und β so zu bestimmen, dass der Werth des Ausdruckes W, welcher zu der Abscisse $AZ = a$ gehört, gleich B wird.

Hierdurch wird die sonst unbestimmte Aufgabe zu einer bestimmten gemacht, wenigstens dann, wenn man die durch die spätere Integration eintretenden neuen Constanten durch eben so viele Punkte bestimmt. Genau wie früher können nämlich so viele Punkte vorgeschrieben werden, durch welche die gesuchte Curve hindurchgehen soll, als neue Constanten durch Integrationen eintreten. Die Zahl derselben wird aber bekannt durch die höchste Ordnung der Differentiale, welche in der Gleichung vorkommen. Da sich aber die ganze Aufgabe auf die absolute Methode zurückführen lässt, so ist die Zahl dieser Constanten beständig gerade, oder die resultirende Gleichung

$$\alpha dA + \beta dB$$

ist entweder endlich oder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung oder eine der vierten, sechsten, achten Ordnung u. s. w.

Ist die Gleichung

$$\alpha dA + \beta dB = 0$$

endlich, dann ist die Curve vollständig bestimmt, sobald das Verhältniss von α und β so angenommen wird, dass der Ausdruck W in der gefundenen Curve den gegebenen Werth B annimmt, was sich immer durchführen lässt.

Findet man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, so ist die gefundene Curve durch zwei Punkte bestimmt; es ist aber üblich die Endpunkte a und z der Curve vorzuschreiben, und in diesen Fällen wird das Problem zu einem bestimmten, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass die gesuchte Curve sich von a bis z erstreckt.

Geht eine Differentialgleichung vierter Ordnung hervor, so wird die Curve, welche Genüge leistet, durch vier beliebig angenommene Punkte bestimmt, und es wird passend sein sie so zu definiren, dass ausser den Endpunkten a und z auch die Lage der Tangenten in den Endpunkten vorgeschrieben wird.

Gelangt man zu einer Differentialgleichung sechsten Grades, so wird die Curve durch sechs beliebige Punkte bestimmt; an

ihrer Stelle können aber auch vorgeschrieben werden die beiden Endpunkte a und z, die Lage der Tangenten in diesen Endpunkten und die Krümmung an diesen Stellen oder die Grösse des Krümmungsradius.

Nach diesen Bemerkungen erkennt man aus der Lösung selbst, welche Bedingungen man beim Stellen der Aufgabe hinzufügen muss, damit sie vollständig bestimmt wird, und diese Erinnerung gilt nicht bloss hier, sondern auch überhaupt bei der absoluten und der relativen Methode.

Beispiel I. 40. Unter allen auf die Abscisse AZ bezogenen Curven, bei denen die Formel

$$\int y\,x\,dx$$

denselben Werth annimmt, die zu finden, in welcher der Werth der Formel

$$\int y^2\,dx$$

am kleinsten ist.

[Lösung: $\alpha x + 2\beta y = 0$.]

Beispiel II. 41. Unter allen Curven derselben Länge, welche die Punkte a und z verbinden, die zu finden, welche die grösste oder kleinste Area $aAZz$ umfasst.

Da die gemeinsame Eigenschaft die Bogenlänge

$$\int dx\sqrt{1+p^2}$$

ist, so ist deren Differentialwerth:

$$-\,n\nu\cdot d\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ferner ist die Formel des Maximums oder Minimums:

$$\int y\,dx$$

und ihr Differentialwerth

$$n\nu\cdot dx.$$

Daher hat man für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$dx = b\,d\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

woraus durch Integration

$$x + c = \frac{bp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

und

$$p = \frac{x + c}{\sqrt{b^2 - (x + c)^2}} = \frac{dy}{dx}$$

folgt. Hieraus wird, indem man integrirt:

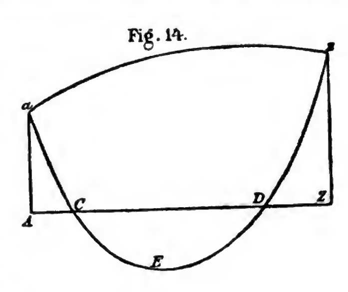
$$y = f \pm \sqrt{b^2 - (x + c)^2}$$

oder

$$b^2 = (y - f)^2 + (x + c)^2;$$

das ist die allgemeine Gleichung eines Kreises. Legt man daher durch die Punkte a und z irgend einen Kreisbogen, so schliesst er unter allen anderen Curven gleicher Länge die grösste oder kleinste Area $aAZz$ ein. Auf doppelte Art aber lassen sich die Punkte a und z durch einen Kreisbogen gegebener Länge verbinden, da er der Axe AZ sowohl die concave wie die convexe Seite zukehren kann. Es ist klar, dass die Area im ersten Falle ein Maximum, im zweiten ein Minimum ist. Wenn daher die Endpunkte a und z und die Länge der Curve zwischen ihnen gegeben werden, welch' letztere grösser sein muss als die Verbindungsstrecke der beiden Punkte, so ist die Lösung vollständig bestimmt, denn es kann nur ein einziger Kreisbogen dieser Länge durch die beiden Punkte gelegt werden, der, je nachdem er die concave oder die convexe Seite der Axe AZ zukehrt, die grösste oder kleinste Area bildet.

Folgerung. 42. Hieraus erhellt, dass der Kreisbogen az zwischen a und z nicht nur die grösste Area $aAZz$ unter allen anderen Linien derselben Länge liefert, sondern, dass auch, wenn man irgend eine Linie $aCEDz$ giebt, welche von a nach z gezogen ist, der Kreisbogen az mit ihr die grösste Area einschliesst. Denn ist die Area $aAZz$ die grösste, so ist es auch die Area



$$aAZz - aAC - zZD + CED,$$

weil die Flächen aAC, zZD, CED constant sind, welche Verbindungslinie zwischen a und z man auch nimmt.

Beispiel III. 43. Unter allen Curven derselben Länge, welche die Punkte A und M verbinden, die zu ermitteln, welche mit den nach einen festen Punkt C gezogenen Geraden AC und MC die grösste oder kleinste Area ACM einschliessen.

[Lösung: Die Curve ist ein Kreisbogen, was schon aus § 42 folgt.]

Beispiel IV. 44. Unter allen Curven, welche a und z verbinden und, um die Axe AZ gedreht, Körper derselben Oberfläche liefern, soll man die bestimmen, für welche gleichzeitig dieser Rotationskörper das grösste Volumen hat.

Die Oberfläche des so erzeugten Körpers ist proportional der Integralformel:

$$\int y\,dx\sqrt{1+p^2},$$

deren Differentialwerth

$$n\nu \cdot dx\left[\sqrt{1+p^2} - \frac{d}{dx}\,\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}\right]$$

ist, das Volumen des so erzeugten Körpers aber ist proportional dem Ausdrucke

$$\int y^2\,dx,$$

dessen Differentialwerth

$$n\nu \cdot dx \cdot 2y$$

ist. Daher ergiebt sich die Gleichung:

$$2y\,dx = b\,dx\sqrt{1+p^2} - b\,d\,\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Multiplicirt man sie mit p, so geht hervor:

$$\begin{aligned} 2y\,dy &= b\,dy\sqrt{1+p^2} - b\,p\,d\,\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}} \\ &= b\,d\,(y\sqrt{1+p^2}) - b\,\frac{yp\,dp}{\sqrt{1+p^2}} - bp\,d\,\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}, \end{aligned}$$

wovon das Integral ist:

$$y^2 = b\,y\sqrt{1+p^2} - b\,\frac{yp^2}{\sqrt{1+p^2}} + b\,c$$

$$= b\,\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} + b\,c,$$

also ist

$$by = (y^2 - bc)\sqrt{1+p^2}$$

und

$$p = \frac{\sqrt{b^2y^2 - (y^2-bc)^2}}{y^2 - bc} = \frac{dy}{dx},$$

folglich:

$$dx = \frac{(y^2 - bc)\,dy}{\sqrt{b^2y^2 - (y^2-bc)^2}}.$$

Über diese Gleichung ist zuerst zu bemerken, dass für $c = 0$ erhalten wird:

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{b^2 - y^2}},$$

daher ist die Curve ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Axe AZ liegt. Beschreibt man also einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt auf der Axe AZ liegt und welcher durch die Punkte a und z hindurchgeht, so genügt man der Aufgabe; es giebt aber nur einen solchen Kreis, und er liefert einen Körper von bestimmter Oberfläche. Wenn man daher unter allen Curven, welche Körper einer anderen, davon verschiedenen Oberfläche erzeugen, diejenige sucht, welche das grösste Volumen hervorbringt, ist sie kein Kreis, sondern eine andere Curve, welche der Gleichung:

$$dx = \frac{(y^2 - bc)\,dy}{\sqrt{b^2y^2 - (y^2-bc)^2}}$$

genügt. Denn man kann vermöge der beiden Constanten b und c nicht nur bewirken, dass die Curve durch die vorgeschriebenen Punkte a und z hindurchgeht, sondern auch, dass die Oberfläche des Körpers eine vorgeschriebene Grösse hat. Übrigens wird die Länge der Curve wegen

$$\int dx\sqrt{1+p^2} = \int \frac{by\,dx}{y^2 - bc}$$

gleich

$$\int \frac{b y\, dy}{\sqrt{b^2 y^2 - (y^2 - bc)^2}};$$

dieses Integral hängt von der Quadratur des Kreises ab und ist

$$= \tfrac{1}{2} b \arccos \frac{b(2c + b) - 2y^2}{b\sqrt{b^2 + 4bc}} + \text{const.}$$

Setzt man $b = \infty$, so entsteht ein eigenthümlicher Fall, denn es geht die Gleichung hervor:

$$dx = -\frac{c\, dy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

welche eine Kettenlinie darstellt, die ihre convexe Seite der Axe AZ zukehrt[31]).

Beispiel V. 45. Unter allen Curven, welche die gleiche Area $aAZz$ umfassen, soll man die finden, welche bei der Rotation um die Axe AZ den Körper kleinster Oberfläche ergiebt.

Da die gemeinsame Eigenschaft die Area

$$\int y\, dx$$

ist, so ist deren Differentialwerth

$$n\nu \cdot dx.$$

Ferner ist die Formel, welche ein Maximum sein soll:

$$\int y\, dx \sqrt{1 + p^2}$$

und ihr Differentialwerth:

$$n\nu \cdot \left[dx \sqrt{1 + p^2} - d\, \frac{yp}{\sqrt{1 + p^2}}\right],$$

woraus für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$n\, dx = dx \sqrt{1 + p^2} - d\, \frac{yp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

entsteht. Multiplicirt man sie mit p und integrirt, so erhält man:

$$ny + b = \frac{y}{\sqrt{1 + p^2}}$$

oder:

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{y}{ny+b}.$$

Daher ist

$$p = \frac{\sqrt{y^2-(ny+b)^2}}{ny+b} = \frac{dy}{dx}$$

und

$$dx = \frac{(ny+b)\,dy}{\sqrt{(1-n^2)\,y^2-2bny-b^2}}.$$

Hieraus erhellt, dass für $b=0$ die Curve in die Gerade übergeht, welche die Punkte a und z verbindet. Ist ferner $n=0$, so hat man

$$dx = \frac{b\,dy}{\sqrt{y^2-b^2}}$$

und erhält eine Kettenlinie, welche der Axe AZ ihre convexe Seite zukehrt. Ist aber $n=-1$, so ist

$$dx = \frac{(b-y)\,dy}{\sqrt{2by-b^2}},$$

woraus durch Integration entsteht:

$$x = c + \frac{2b-y}{3b}\sqrt{2by-b^2}.$$

Das ist eine algebraische Curve, deren Gleichung in rationaler Form lautet:

$$9b\,(x-c)^2 = (2b-y)^2\,(2y-b);$$

sie ist also eine Curve dritter Ordnung und gehört zur Art 68 von Newton[32]).

Beispiel VI. 46. Unter allen Curven az derselben Länge diejenige zu bestimmen, welche bei der Drehung um die Axe AZ das grösste Volumen erzeugt.

Man sucht also unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft

$$\int dx\,\sqrt{1+p^2}$$

diejenige, in welcher

$$\int y^2\,dx$$

ein Maximum ist. Da nun der Differentialwerth der Formel $\int dx\sqrt{1+p^2}$ gleich

$$-nv\cdot d\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

der Differentialwerth der Formel $\int y^2\,dx$ aber gleich

$$2nv\cdot y\,dx$$

ist, so hat man für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$2y\,dx = \pm b^2\,d\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Multiplicirt man sie mit p und integrirt, so kommt:

$$y^2+bc=\pm\frac{b^2}{\sqrt{1+p^2}}$$

oder:

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{\pm b^2}{y^2+bc},$$

und hieraus:

$$p=\frac{\sqrt{b^4-(y^2+bc)^2}}{y^2+bc}=\frac{dy}{dx},$$

sodass

$$x=\int\frac{(y^2+bc)\,dy}{\sqrt{b^4-(y^2+bc)^2}}$$

wird. Diese Curve hat die Eigenschaft, dass ihr Krümmungsradius, welcher allgemein gleich

$$dx : d\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

ist, gleich $\frac{b^2}{2y}$ ist, d. h. umgekehrt proportional der Abscisse, woraus erhellt, dass die gesuchte Curve die elastische[33]) ist. Man kann aber mittelst der willkürlichen Constanten b und c nicht nur bewirken, dass die Curve durch die gegebenen Endpunkte a und z hindurchgeht, sondern auch, dass der Bogen zwischen den Endpunkten gegebene Grösse hat. Wird $c=0$, so entsteht die rechtwinklige elastische Curve. Übrigens lässt sich die Construction niemals durch die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel erledigen, ausser wenn b und c unendlich

sind — in diesem Falle ist die Linie az gerade — oder wenn $b = c$ ist. Denn in diesem Falle ist

$$x = \int \frac{(y^2 + b^2)\, dy}{y \sqrt{-(2b^2 - y^2)}},$$

oder wenn b^2 negativ genommen wird:

$$x = \int \frac{(y^2 - b^2)\, dy}{y \sqrt{2b^2 - y^2}} = -\sqrt{2b^2 - y^2} - b^2 \int \frac{dy}{y \sqrt{2b^2 - y^2}},$$

und wenn man die Integration durch Logarithmen ausführt, wird:

$$x = -\sqrt{2b^2 - y^2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{2b^2} + \sqrt{2b^2 - y^2}}{y}.$$

Die Länge der Curve aber, welche allgemein gleich

$$\int \frac{b^2\, dy}{\sqrt{b^4 - (y^2 + bc)^2}}$$

ist, wird dann gleich:

$$g - \frac{b}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{2b^2} + \sqrt{2b^2 - y^2}}{y}$$ [34]).

Beispiel VII. 47. Die Curve zu finden, welche unter allen anderen derselben Länge um die Axe AZ gedreht einen Körper mit grösster oder kleinster Oberfläche erzeugt.

Da die gemeinsame Eigenschaft

$$\int dx \sqrt{1 + p^2}$$

ist, dessen Differentialwerth

$$-n\nu \cdot d\, \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

ist, der Differentialwerth der Formel des Maximums oder Minimums

$$\int y\, dx \sqrt{1 + p^2}$$

aber gleich

$$n\nu \cdot \left[dx \sqrt{1 + p^2} - d\, \frac{yp}{\sqrt{1 + p^2}}\right]$$



ist, so hat man für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$b\,d\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = dx\sqrt{1+p^2} - d\,\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}},$$

welche mit p multiplicirt und integrirt

$$c = \frac{b}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+p^2}}$$

oder

$$c = \frac{b+y}{\sqrt{1+p^2}}$$

ergiebt. Hieraus wird:

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{b+y}{c}$$

und

$$p = \frac{\sqrt{(b+y)^2 - c^2}}{c} = \frac{dy}{dx},$$

sodass

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{(b+y)^2 - c^2}}$$

ist. Das ist die allgemeine Gleichung einer Kettenlinie, vorausgesetzt, dass die Axe zu der aufgehängten Kette eine horizontale Lage hat. Es kann nun geschehen, dass die Curve der Axe AZ entweder die convexe oder die concave Seite zukehrt, und im ersten Falle ist die Oberfläche des Körpers am kleinsten, im zweiten am grössten[35]).

Beispiel VIII. 48. Unter allen Curven, welche durch die Punkte A und C gehen und die gleiche Area ABC einschliessen, diejenige zu finden, welche in einer Flüssigkeit in der Richtung BA bewegt den geringsten Widerstand erleidet.

Fig. 15.

[Lösung die algebraische Curve:

$$x = c + \frac{bp^2(3+p^2)}{(1+p^2)^2}, \quad y = f + \frac{2bp^3}{(1+p^2)^2},$$

deren Gestalt die umstehende Figur 16 (S. 113) zeigt.]

Beispiel IX. 49. Unter allen Curven AM, welche die gleiche Area APM einschliessen, diejenige zu finden, welche so beschaffen ist, dass, wenn immer vom Mittelpunkte O des Schmiegungskreises auf die Verlängerung der Ordinate MP das Loth ON gefällt wird, die von den Punkten N gebildete Curve die kleinste Area APN einschliesst.

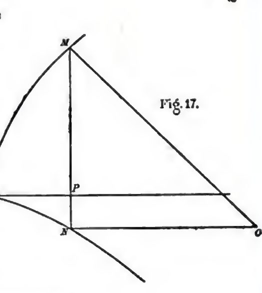
Fig. 16.

Setzt man die Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, so ist die Area APM gleich

$$\int y\,dx;$$

das ist die gemeinsame Eigenschaft, und ihr Differentialwerth ist

$$n\nu \cdot dx.$$



Da ferner der Krümmungsradius MO gleich

$$-\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

ist, so wird

$$MN = -\frac{1+p^2}{q}$$

und

$$PN = -\frac{1+p^2}{q} - y.$$

Daher wird die Area APN gleich

$$-\int y\,dx - \int \frac{1+p^2}{q}\,dx.$$

Sie soll ein Maximum sein. Da ihr Differentialwerth gleich

$$n\nu\left(-dx + d\frac{2p}{q} + \frac{d^2}{dx}\frac{1+p^2}{q^2}\right)$$

ist, so entsteht die Gleichung:

$$n\,dx^2 = dx\,d\frac{2p}{q} + d^2\frac{1+p^2}{q^2},$$

welche integrirt:

$$nx\,dx = \frac{2p}{q}dx + d\frac{1+p^2}{q^2} + b\,dx$$

ergiebt. Multiplicirt man aber dieselbe Gleichung mit p, so kommt:

$$n\,dx\,dy = dy\,d\frac{2p}{q} + p\,d^2\frac{1+p^2}{q^2},$$

wovon das Integral ist:

$$ny\,dx = c\,dx - \frac{2\,dx}{q} + p\,d\frac{1+p^2}{q^2}.$$

Durch Verbindung der beiden Gleichungen entsteht:

$$nx\,dy - ny\,dx = b\,dy - c\,dx + \frac{2p}{q}dy + \frac{2}{q}dx$$

$$= b\,dy - c\,dx + \frac{2\,dx^2 + 2\,dy^2}{dp}.$$

Setzt man

$$nx - b = nt, \qquad ny - c = nu,$$

so ist $dy = du$, $dx = dt$, und es wird

$$n\,dp = \frac{2\,dt^2 + 2\,du^2}{t\,du - u\,dt} = n\frac{d^2u}{dt},$$

oder

$$2\,dt^3 + 2\,dt\,du^2 = nt\,du\,d^2u - nu\,dt\,d^2u,$$

wenn dt als constant angenommen wird. Es sei

$$u = st,$$

dann ist:

$$du = s\,dt + t\,ds,$$
$$d^2u = t\,d^2s + 2\,dt\,ds.$$

Durch Substitution dieser Grössen entsteht die Gleichung:

$$2(1+s^2)\,dt^3 + 4st\,dt^2\,ds + 2(1-n)\,t^2\,dt\,ds^2 = nt^3\,ds\,d^2s.$$

Setzt man jetzt:

$$t = e^{\int r ds},$$

so ist

$$dt = e^{\int r ds} \cdot r ds$$

und

$$d^2 t = 0 = e^{\int r ds} (r d^2 s + dr ds + r^2 ds^2),$$

also

$$d^2 s = -\frac{1}{r} dr ds - r ds^2.$$

Mithin kommt schliesslich die Gleichung zum Vorschein:

$$2(1+s^2) r^3 ds + 4 s r^2 ds + 2(1-n) r ds = -\frac{n dr}{r} - n r ds$$

oder

$$\frac{n dr}{r} + (2-n) r ds + 4 s r^2 ds + 2 r^3 ds + 2 r^3 s^2 ds = 0.$$

Es sei

$$s = v - \frac{1}{r};$$

dann ist:

$$dr + r^2 dv = \frac{n dv}{2(1+v^2)}.$$

Diese Gleichung aber lässt sich integriren, wenn

$$n = 2i(i-1)$$

ist, wobei i eine ganze Zahl bezeichnet. Ist z. B. $n = 4$, so ist

$$r = \frac{2v}{1+v^2} + 1 : (1+v^2)^2 \int \frac{dv}{(1+v^2)^2},$$

woraus sich rückwärts die Construction erledigen lässt.

Beispiel X. 50. Unter allen Curven, in welchen

$$\int x T dx$$

denselben Werth erhält, soll man diejenige finden, in welcher

$$\int y T dx$$

ein Maximum oder Minimum ist, wobei T eine Function von p allein bezeichnet, sodass $dT = Pdp$ ist.

Beispiel XI. 51. Die Curve zu bestimmen, welche gegenüber allen anderen Curven zwischen denselben Endpunkten, zu denen derselbe Werth von

$$\int x\,dx\sqrt{1+p^2}$$

gehört, das grösste oder kleinste

$$\int y\,dx\sqrt{1+p^2}$$

besitzt.

4.

Wie findet man unter allen Curven mit mehreren gemeinsamen Eigenschaften diejenige, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzt?

Lehrsatz I. 1. Die Curve, für welche der Ausdruck

$$\alpha A + \beta B$$

unter der Gesammtheit aller Curven ein Maximum oder Minimum hat, ist zugleich so beschaffen, dass sie unter allen Curven, welche dieselbe Eigenschaft A besitzen, den grössten oder kleinsten Werth der Formel B liefert.

Beweis. Nehmen wir an, es sei die Curve gefunden, in welcher, gegenüber allen anderen derselben Abscisse entsprechenden Curven, der Ausdruck $\alpha A + \beta B$ am grössten ist; denn was man vom Maximum beweist, gilt auch bei geeigneter Veränderung vom Minimum. Es bezeichnen aber die Buchstaben A und B hier solche unbestimmte Formeln oder Ausdrücke, wie sie bei Aufgaben über Maxima und Minima auftreten können, und α und β sind willkürliche Constanten. Bezeichnen wir nun die Curve, in welcher $\alpha A + \beta B$ am grössten ist, mit Q, um sie leicht und ohne mühevolle Beschreibung mit Worten angeben zu können, und denken uns irgend eine andere derselben Abscisse entsprechende Curve R, in welcher A denselben Werth wie in Q annimmt, so hat in der Curve R der Ausdruck $\alpha A + \beta B$ einen kleineren Werth als in Q, weil er in Q seinen grössten Werth erlangt. Da also der Ausdruck A in den Curven Q und R denselben

Werth annimmt, und in Q der Ausdruck $\alpha A + \beta B$ grösser ist, als in R, so folgt, dass der Werth des Ausdruckes B in der Curve Q grösser sein muss, als in der Curve R. Da nun R irgend eine Curve bezeichnet, zu welcher derselbe Werth von A wie zu Q gehört, so ist klar, dass die Curve Q unter allen Curven R den grössten Werth der Formel B ergiebt.

Somit muss die Curve, welche unter der Gesammtheit aller Curven den grössten Werth des Ausdruckes $\alpha A + \beta B$ liefert, zugleich so beschaffen sein, dass sie gegenüber allen anderen Curven, welche mit ihr die Eigenschaft A gemeinsam haben, den grössten oder kleinsten Werth des Ausdruckes B besitzt; denn obgleich dieser Beweis sich nur aufs Maximum bezog, so lässt er sich doch, bei Vertauschung der Worte, sofort aufs Minimum übertragen. Was zu beweisen war.

Folgerung I. 2. Umgekehrt sieht man ein, dass, wenn die Curve ermittelt werden soll, die unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft A ein Maximum oder Minimum des Ausdruckes B besitzt, der Aufgabe genügt wird, wenn man absolut unter allen Curven diejenige aufsucht, in welcher $\alpha A + \beta B$ ein Maximum oder Minimum ist.

Folgerung II. 3. Bei der Lösung solcher Probleme treten also zwei neue willkürliche Constanten α und β auf, welche in den Ausdrücken A und B selbst nicht vorkamen; sie sind aber nur einer Constanten gleichwerthig, weil bloss ihr Verhältniss in Rechnung kommt.

Folgerung III. 4. Wenn man also unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft A diejenige bestimmen soll, in welcher B ein Maximum oder Minimum ist, so muss man von beiden Ausdrücken A und B die Differentialwerthe nehmen, jeden für sich mit einer willkürlichen Constante multipliciren und die Summe gleich Null setzen. So erhält man eine Gleichung für die gesuchte Curve.

Folgerung IV. 5. Zugleich leuchtet ein, dass man auf dieselbe Weise zu verfahren hat, sei es, dass unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft A diejenige gesucht wird, für welche B ein Maximum oder Minimum ist, sei es, dass unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft B diejenige gesucht wird, für welche A ein Maximum oder Minimum ist.

Anmerkung. 6. Was wir in dem Lehrsatze und den beigefügten Folgerungen zeigten, ist aus dem vorhergehenden

Kapitel wohlbekannt, denn es ist die Umkehrung der Methode, Probleme zu lösen, bei denen man unter allen Curven mit einer gemeinsamen Eigenschaft diejenige sucht, welche ein Maximum oder Minimum besitzt. Man darf aber nicht glauben, dass wir nur dieselben Gedanken wiederholt haben, denn was wir dort ziemlich umständlich erschlossen hatten, haben wir hier einfach und kurz bewiesen, und wegen ihrer gegenseitigen Übereinstimmung bekräftigt die eine Beweismethode die andere. Auch wenn vielleicht die erste Methode wegen des häufigen Gebrauches unendlich kleiner Grössen nicht durchsichtig genug und etwas bedenklich erscheinen sollte, so wird doch die hier gegebene Methode jeden Anstoss benehmen. Wenn aber jemand an der Umkehrung des gegenwärtigen Lehrsatzes, wie sie in Folgerung I gemacht wird, zweifeln sollte, so wird diesem die frühere Methode völlig Genüge thun.

Indess kann die Berechtigung dieser Umkehrung aus sich selbst sichergestellt werden. Denn da die Curve Q, in welcher $\alpha A + \beta B$ unter der Gesammtheit aller Curven ein Maximum hat, so beschaffen ist, dass sie unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft A ein Maximum oder Minimum für B ergiebt, welche Werthe auch den Constanten α und β ertheilt werden, so muss auch die Umkehrung gültig sein, wenn man die Coëfficienten α und β so allgemein wie möglich annimmt.

Es schien gut dies zu erwähnen und die Bündigkeit der Schlussweise zu erklären, damit bei ihren späteren Anwendungen kein Zweifel übrig bleibt. Denn obgleich dieser Lehrsatz eigentlich zum vorhergehenden Kapitel gehört, haben wir ihn doch hierher gestellt, um den eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels leichter nach derselben Methode zu behandeln; die Anwendung der anderen Methode würde nämlich sehr umständliche Rechnungen und die verdriessliche Einführung von Differentialen aller Ordnungen erfordern. Indess werden wir so deutlich wie möglich zeigen, dass alles, was wir hier auseinandersetzen, auch vermöge der früheren Methode bestätigt und sogar ermittelt werden kann.

Lehrsatz II. 7. Die Curve, für welche unter der Gesammtheit aller zu derselben Abscisse gehörigen Curven der Ausdruck

$$\alpha A + \beta B + \gamma C$$

am grössten oder kleinsten ist, ist zugleich so be-

schaffen, dass sie unter allen Curven, welche den Ausdruck A und den Ausdruck B gemeinsam haben, den grössten oder kleinsten Werth des Ausdruckes C besitzt.

Beweis. Die Buchstaben A, B und C mögen irgend welche Integralformeln oder unbestimmte Ausdrücke bezeichnen, welche eines Maximums oder Minimums fähig sind, die Buchstaben α, β und γ dagegen willkürliche Constanten. Jetzt sei Q die Curve, welche unter der Gesammtheit aller Curven den grössten oder kleinsten Werth von $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ergiebt. Denkt man sich nun eine andere Curve R, in welcher die Ausdrücke A und B denselben Werth haben, wie in der Curve Q, so hat der zusammengesetzte Ausdruck $\alpha A + \beta B$ in den beiden Curven Q und R denselben Werth, und der ganze Ausdruck $\alpha A + \beta B + \gamma C$ erlangt daher in der Curve R einen kleineren Werth als in der Curve Q, wenn $\alpha A + \beta B + \gamma C$ in der Curve Q ein Maximum ist, dagegen einen grösseren, wenn $\alpha A + \beta B + \gamma C$ in der Curve Q ein Minimum ist. Da nun der Theil $\alpha A + \beta B$ jenes Ausdruckes den beiden Curven Q und R gemeinsam ist, so muss der übrige Theil γC und daher auch C selbst im Falle des Maximums in Q grösser sein als in R, im Falle des Minimums aber ist der Ausdruck C in der Curve Q kleiner als in der Curve R. Hieraus folgt, dass, wenn die Curve Q unter der Gesammtheit aller Curven den grössten oder kleinsten Werth des Ausdruckes $\alpha A + \beta B + \gamma C$ hat, alsdann die Curve Q zugleich unter allen Curven R mit demselben Werthe des Ausdruckes A und des Ausdruckes B den grössten oder kleinsten Werth des Ausdruckes C liefert. Was zu beweisen war.

Folgerung I. 8. Da die Ausdrücke A, B und C beliebig unter sich vertauscht werden können, so ist die Curve, in welcher

$$\alpha A + \beta B + \gamma C$$

ein Maximum oder Minimum ist, zugleich diejenige, in welcher unter allen Curven mit den gemeinsamen Eigenschaften A und B ein Maximum oder Minimum für C vorhanden ist, oder diejenige, welche das grösste oder kleinste B hat unter allen Curven mit den gemeinsamen Eigenschaften A und C, oder endlich diejenige, welche das grösste oder kleinste A hat unter allen Curven, denen die beiden Eigenschaften B und C gleichmässig zukommen.

Folgerung II. 9. Die Curve also, welche unter allen mit den gemeinsamen Eigenschaften A und B das grösste oder kleinste C besitzt, hat auch unter allen Curven mit den gemeinsamen Eigenschaften A und C oder B und C das grösste beziehungsweise kleinste B oder A.

Folgerung III. 10. Sucht man also die Curve, welche unter allen, denen die beiden Eigenschaften A und B gleichmässig zukommen, den grössten oder kleinsten Ausdruck C hat, so genügt man der Aufgabe, indem man die Curve sucht, welche absolut unter allen Curven das Maximum oder Minimum des Ausdruckes $\alpha A + \beta B + \gamma C$ besitzt.

Folgerung IV. 11. Da α, β und γ willkürliche Constanten sind, so treten in die Lösung solcher Probleme drei neue willkürliche Grössen ein, welche in den vorgelegten Formeln A, B und C nicht vorkamen; die drei Constanten α, β und γ sind aber nur gleichwerthig mit zweien.

Folgerung V. 12. Dieselben Constanten kamen schon in der Gleichung der zuerst gefundenen Curve vor; ausser ihnen treten durch die Integrationen so viele neue Constanten ein, als man Integrationen braucht, bevor man zur endlichen Gleichung gelangt.

Folgerung VI. 13. In ähnlicher Art, wie wir diesen und den vorhergehenden Lehrsatz bewiesen haben, lässt sich auch zeigen, dass die Curve, welche absolut unter allen Curven den grössten oder kleinsten Werth des Ausdruckes

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$$

besitzt, zugleich unter allen Curven mit den drei gemeinsamen Eigenschaften A, B und C ein Maximum oder Minimum für den vierten D ergiebt.

Anmerkung. 14. Aus diesem Lehrsatze entnimmt man eine Methode, solche Probleme der relativen Methode zu lösen, bei denen man nach der Curve fragt, welche unter allen zu derselben Abscisse gehörenden Curven, die sich zweier oder mehrerer gemeinsamer Eigenschaften erfreuen, den grössten oder kleinsten Werth irgend eines Ausdruckes besitzt. Die Aufgabe lässt sich nämlich immer auf die absolute Methode zurückführen, sodass man unter der Gesammtheit aller Curven diejenige suchen muss, welche ein Maximum oder Minimum eines gewissen Ausdruckes ergiebt.

Durch diese Zurückführung erlangen wir den Vortheil, dass wir alle diese Probleme mit Hilfe der Differentialwerthe

lösen können, welche wir oben zu ermitteln lehrten. Die Lösung aber gestaltet sich so, dass man die gemeinsamen Eigenschaften und ebenso den Ausdruck des Maximums oder Minimums entwickelt, sie mit willkürlichen Constanten multiplicirt und die Producte zu einer Summe vereinigt. Darauf muss man absolut unter allen Curven diejenige suchen, in welcher jene Summe am grössten oder kleinsten ist. Das geschieht aber, indem man den Differentialwerth der Summe ermittelt und gleich Null setzt.

Das ganze Verfahren kann man mithin darauf zurückführen, dass man nach den oben gegebenen Regeln für die einzelnen Ausdrücke, welche die gemeinsamen Eigenschaften darstellen, und für den Ausdruck des Maximums oder Minimums die Differentialwerthe bildet, jeden für sich mit einer willkürlichen Constante multiplicirt, und die Summe aller dieser Producte gleich Null setzt, denn so erhält man die Gleichung für die gesuchte Curve. Diese eine Vorschrift würde zur Lösung aller Aufgaben dieser Art genügen, aber bevor wir ihre Anwendung auseinandersetzen, ist es zweckmässig die Richtigkeit der Methode auf dem vorher angewandten Wege zu bestätigen.

Aufgabe. 15. Unter allen auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven mit zwei gemeinsamen Eigenschaften A und B diejenige zu finden, in welcher der Werth des Ausdruckes C am grössten oder kleinsten ist.

Lösung. Aus dem Vorhergehenden erkennt man, dass das Problem gelöst wird, wenn man absolut unter allen Curven diejenige sucht, in welcher

$$\alpha A + \beta B + \gamma C$$

ein Maximum oder Minimum ist. Dazu muss man aber die Differentialwerthe der Ausdrücke A, B und C kennen. Sind sie für A gleich $n\nu \cdot dx\,P$, für B gleich $n\nu \cdot dx\,Q$, für C gleich $n\nu \cdot dx\,R$, so erhält man für die gewünschte Curve die Gleichung:

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0.$$

Damit aber die Richtigkeit dieser Lösung besser einleuchtet, wollen wir das Problem mittelst der Methode angreifen, welche wir oben im vorhergehenden Kapitel angewandt haben. Zunächst erkennt man, dass zur Lösung des



Problems drei Ordinaten um unendlich kleine Stücke vermehrt werden müssen, damit man drei vorgeschriebenen Bedingungen genügen kann. Die drei hinzugefügten Stücke, mittelst derer die Genüge leistende Curve in eine sehr wenig davon abweichende übergeführt wird, müssen erstens so beschaffen sein, dass der Ausdruck A, welcher die eine gemeinsame Eigenschaft ausdrückt, beiden Curven in gleicher Weise zukommt, dann muss auch die zweite gemeinsame Eigenschaft B in beiden Curven denselben Werth annehmen, und drittens muss auch, wegen der Natur des Maximums und Minimums, der Ausdruck C in der veränderten Curve denselben Werth wie in der ursprünglichen erlangen; den drei Bedingungen kann man aber nicht genügen, wenn man weniger als drei Stückchen den Ordinaten hinzufügt. Deshalb muss man ausser den beiden Ordinaten Nn und Oo, welche in der früheren Figur um die Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ vermehrt wurden, noch der folgenden Ordinate Pp das Stückchen $p\pi$ hinzufügen.

Zuerst suchen wir die Änderung, welche der Ausdruck A in Folge dessen erleidet. Sie ist:

$$n\nu \cdot P\,dx + o\omega \cdot P_{,}\,dx + p\pi \cdot P_{,,}\,dx.$$

Denn das Stückchen $n\nu$ verursacht die Änderung $n\nu \cdot P dx$, welche mit dem Differentialwerthe übereinstimmt, den der Ausdruck A in Folge von $n\nu$ allein erleidet. Aus dem folgenden Stückchen $o\omega$ aber ergiebt sich die Änderung $o\omega \cdot P_{,} dx$, denn wenn $o\omega$ der folgenden Ordinate hinzugefügt wird, so sind alle Grössen, welche durch $o\omega$ beeinflusst werden, die vorhergehenden derer, welche $n\nu$ beeinflusst, und aus dem gleichen Grunde geht aus dem Stückchen $p\pi$ die Änderung $p\pi \cdot P_{,,} dx$ hervor; alles dies wird ganz klar und einleuchtend, wenn man die Rechnung in derselben Weise durchführt, wie es in § 22 des vorhergehenden Kapitels geschah[36]).

Auf dieselbe Weise erhält ferner der Ausdruck B, dessen aus $n\nu$ hervorgehenden Differentialwerth wir gleich $n\nu \cdot Q dx$ gesetzt haben, in Folge der drei Stückchen $n\nu$, $o\omega$ und $p\pi$ den Zuwachs:

$$n\nu \cdot Q\,dx + o\omega \cdot Q_{,}\,dx + p\pi \cdot Q_{,,}\,dx,$$

und endlich vermehrt sich in Folge der drei Stückchen der Ausdruck C um

$$n\nu \cdot R\,dx + o\omega \cdot R_{,}\,dx + p\pi \cdot R_{,,}\,dx.$$

Daher entstehen nach Division mit dx folgende drei Gleichungen:

$$0 = n\nu \cdot P + o\omega \cdot P_{,} + p\pi \cdot P_{,,},$$
$$0 = n\nu \cdot Q + o\omega \cdot Q_{,} + p\pi \cdot Q_{,,},$$
$$0 = n\nu \cdot R + o\omega \cdot R_{,} + p\pi \cdot R_{,,}.$$

Eliminirt man jetzt die Stückchen $n\nu$, $o\omega$ und $p\pi$, welche nur behufs Durchführung der Lösung zu Hilfe genommen wurden, so erhält man eine Gleichung zwischen den Grössen, die sich auf die Curve beziehen, und welche die Natur der Curve ausdrücken.

Um die Stückchen zu eliminiren, multiplicire man die Gleichungen jede für sich mit neuen Unbekannten α, β und γ, sodass man hat:

$$0 = n\nu \cdot \alpha P + o\omega \cdot \alpha P_{,} + p\pi \cdot \alpha P_{,,},$$
$$0 = n\nu \cdot \beta Q + o\omega \cdot \beta Q_{,} + p\pi \cdot \beta Q_{,,},$$
$$0 = n\nu \cdot \gamma R + o\omega \cdot \gamma R_{,} + p\pi \cdot \gamma R_{,,},$$

und bilde hieraus die Gleichungen:

$$0 = \alpha P + \beta Q + \gamma R,$$
$$0 = \alpha P_{,} + \beta Q_{,} + \gamma R_{,},$$
$$0 = \alpha P_{,,} + \beta Q_{,,} + \gamma R_{,,}.$$

Hieraus erhellt sofort, dass die dritte Gleichung die beiden ersten in sich enthält, wenn man für die Grössen α, β und γ Constanten annimmt. Denn ist

$$0 = \alpha P_{,,} + \beta Q_{,,} + \gamma R_{,,},$$

so ist auch

$$0 = \alpha\, d P_{,,} + \beta\, d Q_{,,} + \gamma\, d R_{,,}$$

und

$$0 = \alpha\, d^2 P_{,,} + \beta\, d^2 Q_{,,} + \gamma\, d^2 R_{,,}.$$

Nun ist:

$$P_{,} = P_{,,} + d P_{,,}, \quad Q_{,} = Q_{,,} + d Q_{,,} \quad R_{,} = R_{,,} + d R_{,,}$$

und

$$P = P_{,,} + 2 d P_{,,} + d^2 P_{,,}, \quad Q = Q_{,,} + 2 d Q_{,,} + d^2 Q_{,,},$$
$$R = R_{,,} + 2 d R_{,,} + d^2 R_{,,},$$

also auch:

$$0 = \alpha P_{,} + \beta Q_{,} + \gamma R_{,},$$
$$0 = \alpha P + \beta Q + \gamma R.$$

Deshalb hat man zur Lösung des Problems die Gleichung

$$0 = \alpha P_{,,} + \beta Q_{,,} + \gamma R_{,,}$$

oder auch die gleichbedeutende

$$0 = \alpha P + \beta Q + \gamma R$$

zu bilden, und schreibt man in ihr an Stelle von α, β und γ willkürliche Constanten, so drückt sie die Natur der gesuchten Curve aus. Diese Gleichung aber stimmt vollständig mit derjenigen überein, welche wir bei der anderen Methode erhielten, und so bestätigen beide Methoden sich gegenseitig. Was zu finden war.

Folgerung I. 16. Alle Probleme der betrachteten Art lassen sich also mit Hilfe der Differentialwerthe lösen, welche aus der Änderung einer Ordinate entstehen, und welche zu finden wir oben ausführlich gelehrt haben.

Folgerung II. 17. Wenn man also die Curve finden soll, welche unter allen anderen auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven, die sich derselben Eigenschaften A und B erfreuen, den grössten oder kleinsten Werth des Ausdruckes C ergiebt, so ist einleuchtend, dass die Aufgabe auf das Problem der absoluten Methode zurückkommt, man solle unter der Gesammtheit aller auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven diejenige bestimmen, in welcher der Ausdruck

$$\alpha A + \beta B + \gamma C$$

ein Maximum oder Minimum ist.

Folgerung III. 18. Man erkennt hieraus zugleich die Methode Probleme zu lösen, bei denen man unter allen Curven, welche in mehr als zwei und sogar in beliebig vielen Eigenschaften übereinstimmen, diejenige verlangt wird, welche sich einer Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut.

Folgerung IV. 19. Denn wenn man unter allen Curven, in welchen die Ausdrücke A, B, C, D gleiche Werthe haben, diejenige ermitteln soll, in welcher der Ausdruck E ein Maximum oder Minimum ist, so genügt man der Aufgabe, indem man unter der Gesammtheit aller Curven diejenige aufsucht, in welcher

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E$$

ein Maximum oder Minimum ist, wobei die Buchstaben α, β, γ, δ und ε willkürliche Constanten bezeichnen.

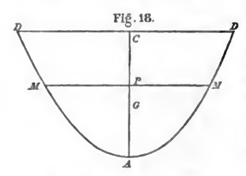
Folgerung V. 20. Je mehr Eigenschaften also vorgelegt werden, welche den Curven gemeinschaftlich sein sollen, unter denen man die gesuchte mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums erforschen soll, um so mehr willkürliche Constanten treten in die Gleichung der Curve ein und um so mehr Curven fasst sie in sich.

Anmerkung I. 21. Warum um so mehr Constanten in die Lösung eintreten, je mehr gemeinsame Eigenschaften vorgelegt werden, kann man aus dem Vorhergehenden leicht erschliessen. Nehmen wir nämlich an, dass man unter allen Curven mit der gemeinsamen Eigenschaft A diejenige ermitteln soll, in welcher B ein Maximum oder Minimum ist, so steht zunächst fest, dass der Aufgabe die Curve genügt, welche unter der Gesammtheit aller Curven das grösste oder kleinste B hat, denn sie hat auch unter allen, welche sich der gemeinsamen Eigenschaft A erfreuen, ein Maximum oder Minimum. Dann aber kann man sich unendlich viele Arten von Curven denken, sodass zu jeder Art derselbe Werth von A gehört, und in jeder Art ist dann eine Curve, welche gegenüber den anderen den grössten oder kleinsten Werth von B liefert. Die Curven, welche Genüge leisten, müssen aber nothwendig alle in der allgemeinen Lösung enthalten sein. Da also die Anzahl der Curven, die Genüge leisten, unendlich gross wird, wenn eine gemeinsame Eigenschaft vorgeschrieben ist, so wird sie in noch stärkerem Grade vermehrt, wenn mehrere gemeinsame Eigenschaften vorgelegt sind.

Wenn jedoch die Werthe, welche die gemeinsamen Eigenschaften in den Curven besitzen, unter denen man die gesuchte ermitteln soll, wirklich bestimmt werden, dann giebt die Lösung immer eine einzige Curve, welche Genüge leistet. Denn jene Constanten können dazu dienen die Werthe, welche die gemeinsamen Eigenschaften in der gefundenen Curve annehmen, nach Belieben zu bestimmen. So kann man zum Beispiel im Falle, dass zwei Eigenschaften A und B gegeben sind, die Curve angeben, zu welcher gegebene Werthe von A und B gehören und welche überdies so beschaffen ist, dass sie gegenüber den unendlich vielen anderen, zu denen dieselben Werthe von A und B gehören, den grössten oder kleinsten Werth irgend eines Ausdruckes C besitzt. Und dieselbe Erinnerung gilt, wenn mehrere gemeinsame Eigenschaften vorgeschrieben sind. Hiernach ist wohl hinreichend

klar, was man mit den Constanten machen muss, welche in die Lösung eintreten, und wie man sie zu benutzen hat.

Beispiel I. 22. Unter allen auf dieselbe Abscisse AC bezogenen Curven, welche unter einander dieselbe Länge besitzen und eine gleichgrosse Area DAD einschliessen, soll man diejenige bestimmen, welche bei der Drehung um die Axe AC einen Körper von grösstem oder kleinstem Volumen erzeugt.



Setzt man die Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$ und $dy = p\,dx$, so sind die beiden vorgelegten gemeinsamen Eigenschaften:

$$\int y\,dx$$

und

$$\int dx \sqrt{1+p^2},$$

und die Formel des Maximums oder Minimums ist:

$$\int y^2\,dx.$$

Jetzt hat man die Differentialwerthe der drei Formeln zu suchen. Zuerst hat die Formel $\int y\,dx$ den Differentialwerth:

$$n\nu \cdot dx,$$

dann ist der Differentialwerth von $\int dx \sqrt{1+p^2}$ gleich:

$$-\,n\nu \cdot d\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

und drittens ist der Differentialwerth der Formel $\int y^2 dx$ gleich:

$$2n\nu \cdot y\,dx.$$

Aus den drei Differentialwerthen erhält man für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$0 = \alpha\, dx - \beta\, d\, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + 2\gamma\, y\, dx$$

oder:

$$b\, dx + 2y\, dx = c^2\, d\, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$= \frac{c^2\, dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit p und integrirt, so hat man.

$$f^2 + by + y^2 = \frac{-c^2}{\sqrt{1+p^2}},$$

wo man c^2 und f^2 nach Belieben positiv oder negativ annehmen darf. Hieraus wird weiter:

$$(f^2 + by + y^2)^2\, (1+p^2) = c^4$$

und

$$p = \frac{\sqrt{c^4 - (f^2 + by + y^2)^2}}{f^2 + by + y^2} = \frac{dy}{dx},$$

mithin ist:

$$dx = \frac{(f^2 + by + y^2)\, dy}{\sqrt{c^4 - (f^2 + by + y^2)^2}};$$

das ist die Gleichung der elastischen Curve. Durch die noch übrige Integration tritt eine neue willkürliche Constante ein, und mittelst der vier Constanten kann man zunächst bewirken, dass die Curve durch zwei gegebene Punkte geht. Dann bleiben noch zwei Constanten übrig, welche man so wählen kann, dass für $x = a$ die Länge und die Area der Curve die gegebene Grösse haben. Überdies wird wegen der Zweideutigkeit des Vorzeichens in der Quadratwurzel das eine Vorzeichen die Curve mit dem Maximum, das andere die Curve mit dem Minimum geben.

Da aber in der Gleichung die gegebene Grösse a der Abscisse nicht vorkommt, so folgt, dass ein Stück der gefundenen Curve, welches zu irgend einer Abscisse gehört, auch die Eigenschaft besitzt, dass es gegenüber allen anderen Curven, welche derselben Abscisse entsprechen und durch dieselben zwei Punkte gehen, und welche dieselbe Länge und dieselbe Area wie jene Curve besitzen, dass dies Stück, sage

ich, bei der Rotation um die Abscissenaxe einen Körper mit dem grössten oder kleinsten Volumen erzeugt. Zwei Punkte nämlich, durch welche die gesuchte Curve hindurchgehen soll, sind hier deshalb in Betracht zu ziehen, weil die Rechnung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ergiebt, welche eine doppelte Bestimmung erfordert. Es können aber auch die beiden übrigen Constanten, welche sofort in der Gleichung vorkamen, durch Punkte bestimmt werden, und hierdurch kommt eine Lösung zum Vorschein, welche lehrt durch vier gegebene Punkte eine Curve zu beschreiben, welche unter allen anderen durch die vier Punkte gezogenen gleicher Länge und gleicher Area bei der Drehung um die Axe den grössten oder kleinsten Körper erzeugt.

Immer wird die Zahl der willkürlichen Constanten, welche in der gefundenen Gleichung actuell oder potentiell vorkommen, anzeigen, wieviel Bestimmungen nöthig sind, damit man eine bestimmte Curve erhält, welche dann gegenüber allen anderen Curven mit denselben Bestimmungsstücken der Aufgabe Genüge leistet.

Beispiel II. 23. Unter allen derselben Abscisse entsprechenden Curven, welche zuerst gleiche Area

$$\int y\,dx$$

einschliessen und dann um die Axe gedreht gleiche Volumina

$$\int y^2\,dx$$

erzeugen, diejenige zu bestimmen, deren Schwerpunkt am höchsten oder niedrigsten liegt, oder in welcher

$$\frac{\int y\,x\,dx}{\int y\,dx}$$

ein Maximum oder Minimum ist.

[Lösung: die gerade Linie].

Beispiel III. 24. Unter allen Curven derselben Länge DAD, welche die gegebenen Punkte D, D verbinden, diejenige zu finden, welche so beschaffen ist, dass, wenn zwischen den verticalen Geraden DB, DB

durch die horizontale NN eine Area $NDADN$ gegebener Grösse abgeschnitten wird, der Schwerpunkt von $NDADN$ die tiefste Lage hat.

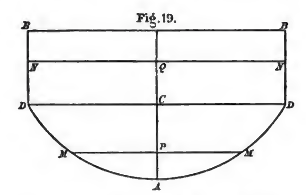


Fig. 19.

Die Lösung dieser Aufgabe ist für die Hydrostatik sehr nützlich, denn mit ihrer Hilfe löst man das Problem, die Gestalt zu bestimmen, welche ein Tuch DAD, das in den Punkten DD an dem Gefässe $BDDB$ befestigt ist, annimmt, wenn in das Gefäss eine gegebene Menge Wasser hineingegossen wird. Denn da das Tuch sich nicht ausdehnt, ist erstens die Länge der Curve DAD gegeben. Ferner ist der Raum $NDADN$ gegeben, der durch die Menge des eingegossenen Wassers gemessen wird. Drittens muss, nach den allgemeinen Gesetzen der Hydrostatik und der Schwere, die Figur DAD so beschaffen sein, dass der Schwerpunkt des Raumes $NDADN$ so tief wie möglich liegt.

Um das Problem zu lösen, setze man $DC = CD = a$. Zieht man noch irgend eine horizontale Gerade MPM, so sei $MP = PM = x$ und $AP = y$. Dann ist der Bogen MAM gleich

$$2\int dx\sqrt{1+p^2},$$

wo $dy = pdx$ gesetzt ist. Wird noch die Länge der Curve DAD gleich $2b$ gesetzt, so muss die Gleichung zwischen x und y so beschaffen sein, dass die Integralformel $\int dx\sqrt{1+p^2}$ für $x = a$ gleich b wird. Weiter ist die Area MAM gleich:

$$2\int x dy = 2\int xpdx;$$

wird $x = a$ gesetzt, so sei sie gleich $2f^2$, sodass also dann $\int xpdx = f^2$ ist. Diese Area ist nicht gegeben, sie muss aber mit der Area $NDDN$ einen gegebenen Raum erzeugen, welcher gleich $2c^2$ sei. Setzt man also $DN = z$, so ist

$$az + f^2 = c^2,$$

und daher für $x = a$:

$$z = \frac{1}{a}(c^2 - f^2) = \frac{1}{a}\left(c^2 - \int xpdx\right).$$

Endlich hat der Schwerpunkt des ganzen Raumes $NDADN$ vom Punkte A den Abstand:

$$\frac{1}{c^2}\left[\int xypdx + az\left(AC + \frac{1}{2}z\right)\right],$$

wo nach der Integration $x = a$ zu setzen ist. Der Schwerpunkt liegt also unterhalb C um die Strecke:

$$\frac{1}{c^2}\left[AC(c^2 - az) - \frac{1}{2}az^2 - \int xypdx\right],$$

die ein Maximum sein muss. Da aber

$$z = \frac{1}{a}\left(c^2 - \int xpdx\right)$$

ist, so muss

$$AC \cdot \int xpdx - \frac{c^4}{2a} + \frac{c^2}{a}\int xpdx - \frac{1}{2a}\left(\int xpdx\right)^2 - \int xypdx$$

ein Maximum sein.

Das Problem kommt also darauf zurück, dass unter allen Curven gegebener Länge, welche zur Abscisse $x = a$ gehören, diejenige gesucht wird, in welcher der Ausdruck:

$$h\int xpdx + \frac{c^2}{a}\int xpdx - \frac{1}{2a}\left(\int xpdx\right)^2 - \int xypdx$$

ein Maximum ist, wenn nämlich für $x = a$ y gleich h ist.

Nunmehr ist die Länge der Curve:

$$\int dx\sqrt{1 + p^2},$$

und ihr Differentialwerth gleich

$$- d \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Weiter ist der Differentialwerth der Formel

$$\int xpdx$$

gleich

$$- dx,$$

und der Differentialwerth der Formel

$$\int xypdx$$

gleich

$$xpdx - d(xy) = - ydx.$$

Hieraus ergiebt sich als Differentialwerth des ganzen Ausdruckes, welcher ein Maximum sein soll:

$$- hdx - \frac{c^2}{a} dx + \frac{f^2}{a} dx + ydx,$$

und da h und f^2 unbestimmte Constanten sind, geht er in

$$kdx + ydx$$

über, wo k eine willkürliche Constante bedeutet.

Man erhält daher für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$kdx + ydx = - g^2 d \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Multiplicirt man sie mit p und integrirt, so ergiebt sie:

$$m + 2ky + y^2 = \frac{2g^2}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Das ist die bekannte Gleichung der elastischen Curve; sie bleibt dieselbe, welchen Werth auch die Grösse c^2 annimmt. Man genügt daher der vorgelegten Aufgabe, indem man durch die Punkte D und D die elastische Curve zieht, deren Axe oder orthogonaler Durchmesser die verticale Gerade AC ist und von der das Stück DAD die gegebene Länge $2b$ hat. Auf diese Weise ist die Lösung vollständig bestimmt, und es ergiebt sich eine einzige Curve, welche Genüge leistet.

Man hätte leicht vorhersehen können, dass die Grösse des Raumes $NDADN = 2c^2$, um dessen Schwerpunkt es

sich handelt, ganz aus der Rechnung herausfällt, und dann wäre die Lösung viel leichter gewesen. Absichtlich aber haben wir diese Bedingung, welche freilich überflüssig ist, hinzugefügt, damit man sieht, wie andere Aufgaben dieser Art zu lösen sind, bei denen eine solche Vereinfachung nicht stattfindet[37]).

Anmerkung II. 25. Somit ist also die unbestimmte Methode der Maxima und Minima, bei der es sich darum handelt Curven zu finden, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzen, vollständig auseinandergesetzt worden, und zwar wurde sie zurückgeführt auf die Ermittelung der Differentialwerthe, welche aus dem Zuwachse einer einzigen Ordinate hervorgehen.

Verlangt nämlich die Aufgabe unter der Gesammtheit aller auf dieselbe Abscisse bezogenen Curven diejenige, in welcher irgend ein unbestimmter Ausdruck den grössten oder kleinsten Werth erhält, so muss man seinen Differentialwerth suchen, der gleich Null gesetzt eine Gleichung für die gesuchte Curve ergiebt. Soll man aber unter allen Curven, welche eine oder mehrere Eigenschaften gemeinsam haben, diejenige bestimmen, in welcher der Werth eines vorgelegten Ausdruckes am grössten oder kleinsten ist, dann muss man die Differentialwerthe sowohl der einzelnen gemeinsamen Eigenschaften als auch des Ausdruckes des Maximums oder Minimums suchen und diese einzeln mit willkürlichen Constanten multipliciren. Die Summe der Producte gleich Null gesetzt ergiebt dann eine Gleichung für die gesuchte Curve. Wie man aber den Differentialwerth irgend eines nichtbestimmbaren Ausdruckes findet, dafür haben wir in den vorigen Kapiteln ausreichende und ziemlich leicht anwendbare Vorschriften gegeben [38]), sodass bei diesem Gegenstande nichts übrig geblieben sein dürfte, was noch hinzuzufügen wäre.

Anmerkungen.

In diesem und dem folgenden Bändchen sollen einige ältere Abhandlungen herausgegeben werden, welche für die Variations-Rechnung von besonderer Wichtigkeit sind.

Wenn auch *Newton* bereits 1686 die Aufgabe des Rotationskörpers kleinsten Widerstandes gestellt und auf eine Differentialgleichung zurückgeführt hatte, so begann doch die Entwickelung der Variations-Rechnung erst, als *Johann Bernoulli* im Juni 1696 den Mathematikern das Problem der Brachistochrone vorlegte. Die Reihe der hier mitgetheilten Abhandlungen eröffnen daher die betreffenden Arbeiten von *Joh. Bernoulli*: Problema novum ad cuius solutionem mathematici invitantur, Acta Eruditorum, Juni 1696, Programma, editum Groningae anno 1697 und Curvatura radii in diaphanis non uniformibus solutioque problematis de invenienda linea brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit; et de curva synchrona, seu radiorum unda, construenda, Acta Eruditorum, Mai 1697. Sie sind wieder abgedruckt in den Opera omnia, Lausannae et Genevae, 1742, t. I, S. 161, 166—169, 187—193.

Aber auch die Lösung von *Johanns* Bruder *Jakob* durfte nicht fehlen, denn dieser benutzt ein Princip, welches bei einer grossen Klasse von Aufgaben anwendbar ist, dass nämlich die Eigenschaft des Maximums oder Minimums nur dann einer ganzen Curve zukommen kann, wenn sie jedem ihrer Theile zukommt, und erweitert das Gebiet der Variations-Rechnung, indem er seinem Bruder das isoperimetrische Problem vorlegt, das zu lösen ihm auf einem freilich recht mühsamen Wege gelungen war. *Jak. Bernoullis* Abhandlung: Solutio problematum fraternorum una cum propositione

reciproca aliorum erschien in den Acta Eruditorum, Mai 1697, sie ist wieder abgedruckt im zweiten Bande der Opera, Genevae 1744, S. 768—775.

Leonhard Euler hat das Verdienst, die Einzeluntersuchungen der Brüder *Bernoulli* zusammengefasst und die Variations-Rechnung als besonderen Zweig der Analysis begründet zu haben. In seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand (Comment. Acad. imp. t. VI ad annos 1732/33, Petersburg 1739) formulirt er das isoperimetrische Problem in grosser Allgemeinheit und giebt vermöge seines Multiplicators eine einfache Lösung. Veranlasst durch das Problem der Brachistochrone im widerstehenden Mittel geht er dann weiter und betrachtet Aufgaben, bei denen als Nebenbedingung eine Differentialgleichung hinzutritt; seine Lösung ist jedoch unrichtig, da er auch hier das Princip von *Jak. Bernoulli* anwendet (Comment. t. VII ad annos 1734/35, Petersburg 1740, Mechanica sive motus scientia, Bd. II, Petersburg 1736). Bald darauf erkennt er, dass jenes Princip nicht allgemeingültig ist, findet aber keinen Ersatz dafür (Comment. t. VIII ad annum 1736, Petersburg 1741). Erst 1744 überwindet er diese Schwierigkeit, und nun erscheint sein Hauptwerk: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausannae et Genevae 1744. Jetzt löst *Euler* das Problem in seiner ganzen Allgemeinheit. Er lässt zu, dass der Ausdruck unter dem Integralzeichen Ableitungen beliebig hoher Ordnung enthält, und erledigt den Fall, dass darin noch weitere Integrale oder sogar Grössen vorkommen, welche durch Differentialgleichungen definirt werden. Ganz besonders werthvoll ist das Werk durch die zahlreichen, schönen Beispiele, denen die folgenden 150 Jahre wenig neue hinzugefügt haben.

In der Methodus inveniendi haben so die Forschungen der ersten Periode der Variations-Rechnung ihre classische Darstellung gefunden.

Euler selbst hatte es ausgesprochen, dass er sein Werk nicht für vollendet ansehe. Seine Methode ist nämlich eine wesentlich geometrische. Dies hat den Vortheil, dass die Behandlung der einfacheren Probleme überaus klar und durchsichtig wird, sodass die Methodus noch heute als Einführung in die Variations-Rechnung treffliche Dienste leisten wird. Sobald aber das *Bernoulli*sche Princip seine Geltung verliert,

werden die Rechnungen überaus lang und verwickelt, und bei aller Bewunderung für die Geschicklichkeit, mit welcher *Euler* die Hindernisse überwindet und schliesslich einfache und elegante Resultate erlangt, kann man seine Herleitungen doch nicht befriedigend finden.

Was *Euler* vermisst hatte, und noch mehr, leistete die grosse Entdeckung, welche ihm 1755 der junge *Lagrange* mittheilte. Mit ihr beginnt eine neue Epoche der Variations-Rechnung, an der auch *Euler* grossen Antheil hat; in einer Reihe werthvoller Abhandlungen hat er den neuen Aufbau der Variations-Rechnung genauer zu begründen und weiterzuführen versucht. Eine Zusammenstellung der betreffenden Veröffentlichungen *Eulers* findet man bei *G. Eneström*, Verzeichniss der Schriften Leonhard Eulers, Leipzig 1913, S. 303. Eine historisch-kritische Besprechung der gesammten Leistungen *Eulers* für die Variations-Rechnung hat *A. Kneser* gegeben (Abh. zur Geschichte der math. Wissenschaften, Heft 25, Leipzig 1907, S. 21—60); dabei wird die Methodus inveniendi als *Eulers* Hauptwerk eingehend gewürdigt.

Hiermit sind zugleich die Gründe entwickelt, welche uns bewogen haben, von *Eulers* Arbeiten gerade die Methodus inveniendi, jedoch mit Auswahl, herauszugeben. Da sich herausstellte, dass die Kapitel I, II, V und VI, in welchen die Aufgaben der einfacheren Art behandelt sind, ein wohlzusammenhängendes Ganzes bilden, haben wir uns auf sie beschränken zu sollen geglaubt und diese Kapitel in textgetreuer Übersetzung wiedergegeben. Nur bei einigen Beispielen, welche den Charakter von Übungsaufgaben haben, ist die Ausrechnung fortgelassen, aber das Resultat in eckigen Klammern angegeben worden. Für die Beispiele zu Kapitel V, § 35, 38 und 52 sei auf die inhaltreiche Abhandlung von *Ossian Bonnet*, Propriétés géométriques et mécaniques de quelques courbes remarquables, Journal de mathématiques, Sér. I, t. 9, 1844, S. 97—112 verwiesen. Einige kleine Versehen *Eulers* wurden verbessert; die Begründung findet man in den folgenden Anmerkungen.

Nicht aufgenommen sind die Kapitel III und IV, welche die oben genannten verwickelteren Aufgaben betreffen; dies konnte um so eher geschehen, als durch die im folgenden Bändchen befindlichen Abhandlungen von *Lagrange* die Lücke ausgefüllt wird. Ebenso fehlen die beiden Anhänge: De curvis elasticis und: De motu projectorum in medio resistente, welche keine unmittelbare Beziehung zur Variations-Rechnung haben.

Der erste Anhang ist in Heft 175 dieser Sammlung: Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Schwingungen der ebenen elastischen Curven von *H. Linsenbarth* herausgegeben worden.

---

1) *Zu S. 4.* *Mersenne* stellte 1646 die Aufgabe des Schwingungsmittelpunktes. *Pascals* berühmtes Preisausschreiben von 1658 bezog sich auf die Cycloide. *Fermat* legte 1657 den Englischen Geometern verschiedene zahlentheoretische Probleme vor. Von *Viviani* rührt die »Florentiner« Aufgabe her (Acta Erud. 1692). Von anderen ist *Leibniz* zu nennen, der 1687 das Problem der Isochrone und *Jak. Bernoulli*, der 1690 das Problem der Kettenlinie stellte.

2) *Zu S. 4.* Der bereits 1745 veröffentlichte Briefwechsel zwischen *Leibniz* und *Joh. Bernoulli* ist von *Gerhardt* im dritten Bande von *Leibnizens* mathematischen Schriften, Halle 1856, neu herausgegeben worden. Der angeführte Brief findet sich dort S. 288.

3) *Zu S. 6.* Diese Bemerkung richtet sich gegen *Newton*, der seine Methode der Fluxionen mit einem gewissen Geheimniss umgab, während *Leibnizens* erste Veröffentlichung schon 1684 geschehen war, und ist ein Vorspiel zu dem Prioritätsstreit, der 1708 zum Ausbruch kam.

4) *Zu S. 6.* Über den Streit zwischen *Descartes* und *Fermat* vgl. *Montucla*, Histoire des Mathématiques, 2. éd., t. II (Paris an VII), S. 139.

5) *Zu S. 7.* Die Entdeckung von *Huygens* findet man in seiner Schrift über die Pendeluhr: Horologium oscillatorium, Paris 1673.

Wenn ein Kreis vom Radius r auf einer horizontalen Geraden rollt ohne zu gleiten, so beschreibt jeder Punkt des Umfanges eine Cycloide, zu deren Darstellung man mit Vortheil die beiden Gleichungen:

$$x = r\,(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r\,(1 - \cos\varphi)$$

benutzt. Kehrt man eine solche Cycloide um, sodass ihre Spitzen nach oben zeigen, so ist sie eine Tautochrone, das heisst die Zeit, welche ein schwerer Punkt gebraucht, um von irgend einer Stelle der Cycloide bis zu ihrem tiefsten Punkte zu gelangen, ist stets dieselbe.

6) *Zu S. 8.* *Fermat* hatte das jetzt nach *Snellius* benannte Brechungsgesetz angegriffen, welches *Descartes* 1637 in seiner Géométrie aufgestellt hatte, weil er im Gegensatz

zu diesem annahm, die Lichtgeschwindigkeit im optisch dünnerem Medium sei grösser als im optisch dichteren. Auf Veranlassung des Cartesianers *Clerselier* nahm er 1662 seine Untersuchungen wieder auf und entdeckte zu seiner grossen Überraschung, dass gerade bei seiner Annahme über die Lichtgeschwindigkeit aus dem Princip der schnellsten Ankunft das Brechungsgesetz von *Descartes* folge.

Fermats Brief an *De la Chambre* findet sich in der Editio secunda der Epistolae *Renati Cartesii* von 1692 in t. III, S. 128, der an *Clerselier* S. 151; beide sind 1662 geschrieben. Die citirte Stelle der Varia opera mathematica *Petri de Fermat* (Tolosae 1779) enthält einen Brief an einen Unbekannten, in dem *Fermat* die Geschichte seiner optischen Untersuchungen erzählt. Der Traité de la lumière von *Huygens*, verfasst 1678, war 1690 zu Leyden erschienen; wiederherausgegeben ist es in Nr. 20 dieser Sammlung.

7) *Zu S. 12.* Die Construction beruht darauf, dass alle Cycloiden einander ähnlich sind.

8) *Zu S. 12.* Dass die Natur stets auf die einfachste Art verfahre, war ein Lieblingsgedanke des 18. Jahrhunderts, vgl. *Mach*, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt, Leipzig 1883 (4. Aufl. 1901).

Die Behauptungen *Bernoullis* über die Brachistochronen für $t = ax$ und $t = a\sqrt[3]{x}$ sind richtig und leicht zu beweisen. Wird die Geschwindigkeit der n-ten Potenz der Fallhöhe proportional angenommen, so hat man als Tautochrone die Curve:

$$y = \int \sqrt{x^{2n-2} - \lambda^2}\, dx$$

(λ bedeutet eine Constante), denn das Integral:

$$\int_0^h \frac{x^{n-1}\, dx}{(h-x)^n},$$

welches die Zeit des Falles von der Höhe $x = h$ bis zur Höhe $x = 0$ ausdrückt, ist, wie die Substitution $x = hu$ zeigt, unabhängig von h. Da dieses Integral nur dann einen Sinn hat, wenn n zwischen 0 und 1 liegt, ist *Bernoullis* Annahme $t = ax$ unzulässig, dagegen führt die Annahme $t = a\sqrt[3]{x}$ wirklich auf eine transcendente Curve, nämlich auf ein elliptisches Integral für y.

9) *Zu S. 13.* Die Figur findet sich S. 45 der in 6) erwähnten Ausgabe.

10) *Zu S. 13.* Der Beweis lässt sich im Stile *Joh. Bernoullis* etwa so führen. Der schwere Punkt sei während derselben Zeit auf der Cycloide von A bis zum Punkte B mit den Coordinaten x, y gekommen, auf der verticalen Geraden von A bis P, wo AP gleich ξ sei. Im nächsten Zeitelemente fällt er auf der Geraden um eine Strecke, welche proportional $d\xi : \sqrt{\xi}$, auf der Cycloide um eine Strecke, welche proportional $dx : \sqrt{x}$ ist. Mithin hat man:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{a}{ax - x^2}}\, dx,$$

oder:

$$\frac{1}{2}\frac{a\,d\xi}{\sqrt{a\xi}} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx + \frac{\frac{1}{2}a - x}{\sqrt{ax - x^2}}\, dx,$$

das heisst das Differential von $\sqrt{a\xi}$ ist gleich der Summe der Differentiale von CM und LO (Fig. 1), folglich

$$\sqrt{GK \cdot AP} = CM + LO = \text{arc } GL,$$

was zu beweisen war.

11) *Zu S. 13.* *Huygens* Lichttheorie hatte *Joh. Bernoulli* schon 1693 auf das allgemeine Problem der orthogonalen Trajectorien geführt. *Leibniz* hielt es für so schwierig, dass er es in seinem Streite mit *Newton* den Engländern als Aufgabe vorlegte (Acta Erud. Mai 1715), *Newton* gab jedoch sofort eine Lösung; vgl. *C. I. Gerhardt*, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877, S. 165—167. Das besondere Problem für logarithmische Curven löste *Jak. Bernoulli* (Acta Erud. Mai 1697).

12) *Zu S. 14.* Die zu einer Abscisse gehörigen Stücke einer Curve, wie Ordinate, Tangente, Subtangente, Krümmungsradius, hatte *Leibniz* (Acta Erud. April 1692) als Functionen der Abscisse bezeichnet. Erst *Joh. Bernoulli* machte sich von dieser geometrischen Auffassung frei und definirte (1718) fonction als »quantité composée de quelque manière que ce soit d'une grandeur variable et de constantes« (Opera omnia, t. II. S. 241).

13) *Zu S. 17.* Die Einwendungen des Holländers *Nieuwentiit* entbehrten nicht jeder Berechtigung, denn *Leibnizens*



Antwort (Acta Erud. 1694) zeigte, dass er zwar die geometrische und mechanische Bedeutung der unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung richtig erkannte, dass aber seine analytische Auffassung unzulänglich war.

14) *Zu S. 18.* Eine ausführliche Geschichte der Cycloide findet man in *Montuclas* schon angeführtem Werke, t. II. S. 52—73. Hier sei nur erwähnt, dass *Galilei* 1599 die Gestalt der Cycloide richtig erkannte und auch versuchte, ihre Area zu bestimmen. Die strenge Lösung dieser Aufgabe gelang erst *Roberval* (1637) und *Torricelli* (1638). Kurz darauf gaben *Descartes* und *Viviani* die Tangentenconstruction. *Pascal* (1658) und *Huygens* (1673) sind schon in 1) und 5) erwähnt worden.

15) *Zu S. 19.* Angeregt durch von Traité de la lumière (1690) von *Huygens* hatte *Leibniz*, Acta Erud. Sept. 1692, auf die Wichtigkeit der optischen Curven hingewiesen. Hierdurch wurde *Jak. Bernoulli* veranlasst, den durch Reflexion entstehenden, kaustischen Curven, welche *Tschirnhausen* (Acta Erud. Nov. 1682) eingeführt hatte, die durch Brechung entstehenden, diakaustischen Curven an die Seite zu stellen (Acta Erud. Mai 1694).

16) *Zu S. 19.* Ein Beweis des Satzes, dass von allen Figuren gleichen Umfanges der Kreis den grössten Inhalt hat, ist bereits von *Zenodoros* versucht und uns durch *Pappos* erhalten worden, vgl. *Cantor*, Geschichte der Mathematik, Bd. I. 3. Aufl. S. 356.

17) *Zu S. 19.* Dass bei der Kettenlinie der Schwerpunkt des Umfanges am weitesten von der Basis entfernt ist, erscheint bei *Joh. Bernoulli* (Opera omnia, t. III. S. 497) erst am Schluss als Folgerung aus einem allgemeinen Satze über das Gleichgewicht schwerer Körper.

18) *Zu S. 22.* Das erste Problem der Variationsrechnung hat *Newton* 1686 gestellt, es ist das von *Euler* weiter unten (S. 63) behandelte Problem des Rotationskörpers kleinsten Widerstandes.

19) *Zu S. 25.* *Eulers* Angabe ist ungenau, *Jak. Bernoulli* legte das isoperimetrische Problem schon 1697 vor, und seine Lösung erschien Acta Erud. Juni 1700.

20) *Zu S. 30.* Diese Deduction beweist nur, dass die Werthe der Integralformel eine obere und eine untere Grenze haben, aber nicht, dass immer eine Curve existirt, in welcher ein solcher Grenzwerth wirklich angenommen wird. Andererseits können unter Umständen mehrere Curven ein Maximum

oder Minimum liefern, denn dazu gehört nur, dass sie gegenüber den benachbarten Curven grössere oder kleinere Werthe der Integralformel ergeben.

21) *Zu S. 32.* Während es den Mathematikern des 18. Jahrhunderts geläufig war, dass die bekannte Bedingung für das Maximum oder Minimum einer Ordinate auch Wendepunkte einer Curve liefere, hat in der Variations-Rechnung bis ins 19. Jahrhundert hinein eine grosse Verwirrung im Gebrauche der Worte »Maximum« und »Minimum« geherrscht, sodass *Jacobi* 1837 tadelnd bemerkte: »man sagt, ein Ausdruck sei ein Maximum oder Minimum, wenn man blos sagen will, dass seine Variation verschwindet, selbst wenn auch weder ein Maximum noch ein Minimum stattfindet. Man sagt eine Grösse sei ein Maximum, wenn man nur sagen will, dass sie kein Minimum sei«. Dies gilt auch von *Euler* und darf im folgenden nicht ausser Acht gelassen werden.

22) *Zu S. 32.* Quantitas integralis indefinita ist mit: nichtbestimmbare Integralformel übersetzt worden, weil der Ausdruck: unbestimmtes Integral gegenwärtig ein Integral mit unbestimmter Grenze bedeutet und weil nachher functio indeterminata am besten durch: unbestimmte Function wiedergegeben wird.

23) *Zu S. 61.* Die Formel im Text ergiebt sich so. Es sei t die Zeit, g die Constante der Schwere, ds das Bogenelement der Cycloide, dann ist nach dem Satze von der lebendigen Kraft:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gx,$$

vorausgesetzt, dass die Bewegung im Anfangspunkte der Coordinaten beginnt. Hieraus folgt:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}.$$

24) *Zu S. 63.* Beispiel V ist das erste Problem der Variations-Rechnung. Es findet sich in *Newtons* classischem Werke: Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686, lib. II, Sect. VII, Prop. 34, Scholium. *Newton* nimmt an, dass jedes Oberflächenelement eines Rotationskörpers, welcher in einer Flüssigkeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit

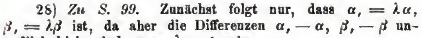
parallel seiner Axe, die als x-Axe gewählt werde, bewegt wird, einen Druck erfährt, der stets senkrecht auf der Fläche steht, und dem Quadrate der Geschwindigkeit in der Richtung der Flächennormale proportional ist. Wird der Winkel zwischen Flächennormale und x-Axe mit λ bezeichnet, so ist dieser Druck proportional $\cos^2\lambda$. Da der Rotationskörper als starr vorausgesetzt wird, kommt vom Druck nur die Componente nach der x-Axe zur Geltung, sodass der Gesammtdruck, welchen der Körper erfährt, proportional dem Integral über $\cos^3\lambda$ mal dem Oberflächenelemente zu setzen ist. Zerlegt man die Rotationsfläche durch Ebenen senkrecht zur x-Axe in Zonen, so erhält man als Oberflächenelement $2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$, woraus in Verbindung mit der Gleichung $\cos\lambda = dy : \sqrt{dx^2 + dy^2}$ die Formel des Textes folgt.

Newton gab in den Principia ohne jede Begründung die Differentialgleichung der erzeugenden Curve in geometrischer Einkleidung; aus seinem Nachlass ist in dem Catalogue of the Portsmouth Collection, Cambridge 1888, S. XXI—XXIII ein Brief, vermuthlich aus dem Jahre 1694 und an *David Gregory*, veröffentlicht worden, der einen ausführlichen Beweis enthält (vgl. *O. Bolza*, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. 13, 1913, S. 146—149). Auf *Newtons* Lösung lenkte 1699 *Fatio de Duillier* die Aufmerksamkeit in einer Flugschrift, deren Zweck war, *Newton* als eigentlichen Erfinder der Infinitesimalrechnung, *Leibniz* höchstens als zweiten Erfinder hinzustellen. Jetzt beschäftigten sich *De l'Hospital* und *Joh. Bernoulli* mit dem Probleme und integrirten die Differentialgleichung (Acta Erud. Aug. u. Nov. 1699). Weiteres über die Geschichte dieses Problems findet man in Anm. 15) des folgenden Bändchens Nr. 47.

25) *Zu S. 66.* Die Methode, welche *Euler* vermisste, gefunden zu haben ist das grosse Verdienst von *Lagrange*, dessen grundlegende Abhandlungen im folgenden Bändchen nachzusehen sind.

26) *Zu S. 76.* Eine einfachere Herleitung der Gleichung $w = \sqrt{by - ax}$ hat *Schellbach* gegeben (Journal für Mathematik, Bd. 41, 1851).

27) *Zu S. 97.* Im Original heisst diese Stelle: palam est quantitatem K fore valorem, quam quantitas I in proximo sequente loco induit, atque idcirco esse $K = I'$. Die Tabelle S. 96 oben lässt aber erkennen, dass vielmehr $K = I$, zu setzen ist. Dies Versehen ist sogleich im Text verbessert worden.



28) *Zu S. 99.* Zunächst folgt nur, dass $\alpha, = \lambda\alpha$, $\beta, = \lambda\beta$ ist, da aber die Differenzen $\alpha, - \alpha$, $\beta, - \beta$ unendlich klein sind, muss $\lambda = 1$ sein.

29) *Zu S. 100.* Diese Deduction kann nicht als streng gelten, denn es ist nicht bewiesen worden, dass man mit den Differentialwerthen dA und dB ebenso wie mit gewöhnlichen Differentialen rechnen darf. *Euler* scheint diesen Einwurf vorausgesehen zu haben, denn er giebt S. 116 eine andere Herleitung, bei welcher der Gebrauch von Differentialwerthen vermieden wird. Aber auch diese ist nicht stichhaltig, denn sie zeigt nur, dass man Curven der verlangten Art erhält, wenn man $\alpha V + \beta W$ nach der absoluten Methode behandelt, aber es bleibt fraglich, ob man auf diese Weise alle Curven erhält. Eine strengere Herleitung findet man bei *Bertrand*, Liouville's Journal, sér. I, t. VII, 1842.

30) *Zu S. 100.* Der Satz in eckigen Klammern ersetzt einen hier fortgelassenen Hinweis des Originals auf Kap. IV.

31) *Zu S. 108.* Eine Zusammenstellung der Literatur über dieses viel behandelte, jedoch noch keineswegs vollständig erledigte Problem, welches mit *Plateaus* schönen Untersuchungen über die Gestalt von Flüssigkeitslamellen eng zusammenhängt, findet man in der Dissertation von *W. Howe*, Berlin 1887.

32) *Zu S. 109.* *Euler* bezieht sich auf *Newtons* Enumeratio linearum tertii ordinis, London 1704, worin die Curven dritter Ordnung in 72 Arten getheilt werden. Nach *Newton* lassen sich alle diese Curven durch Projection auf die fünf divergirenden Parabeln zurückführen, deren gemeinsame Gleichung:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ist. Die im Text betrachtete Curve ist eine divergirende Parabel, und zwar eine solche mit Doppelpunkt.

33) *Zu S. 110.* Elastische Curve heisst die Curve, welche die Gestalt einer an zwei Punkten aufgelegten Feder angiebt. Sie hat die Eigenschaft, den Ausdruck:

$$\int \frac{dw}{\varrho^2}$$

zu einem Minimum zu machen. *Euler* hat sie im ersten der beiden Anhänge zur Methodus eingehend untersucht; vgl. Heft 175 dieser Sammlung.

34) *Zu S. 111.* Im Original ist bei der Integration der Factor 2 vor b^2 übersehen worden, wodurch eine kleine Änderung nothwendig wurde.

35) *Zu S. 112.* Dass das Problem auf die Kettenlinie führt, folgt ohne jede Rechnung aus der *Guldin*schen Regel, wonach die Mantelfläche eines Rotationskörpers proportional ist dem Producte aus der Länge des rotirenden Bogens und dem Abstande seines Schwerpunktes von der Axe. Ist also die Bogenlänge gegeben, so erhält man ein Extremum der Oberfläche, wenn der Abstand des Schwerpunktes ein solches ist.

36) *Zu S. 122.* Hier machte ein Versehen *Eulers*, auf welches schon in 27) aufmerksam gemacht wurde, einige kleine Änderungen gegen den Urtext nöthig.

37) *Zu S. 132.* Diese Aufgabe rührt von *Joh. Bernoulli* her, vgl. Opera omnia, t. III, S. 512, und steht in engem Zusammenhange mit dem von *Jak. Bernoulli* gestellten Problem, die Gestalt eines vom Winde aufgeblähten Segels zu bestimmen.

38) *Zu S. 132.* Im Original folgt noch ein Hinweis auf das hier weggelassene Kapitel IV.

Heidelberg, Dezember 1913.

P. Stäckel.





Inhalt.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.